

3節 導関数の応用

A 問題

118

(1) $f(x) = x^3 - 2x$ とすると
 $f'(x) = 3x^2 - 2$ $f'(1) = 1$
よって、接線の方程式は
 $y + 1 = x - 1$ より $y = x - 2$

(3) $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ とすると
 $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$ $f'(2) = 0$
よって、接線の方程式は
 $y - 3 = 0$ より $y = 3$

(5) $f(x) = \sin x$ とすると
 $f'(x) = \cos x$ $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
よって、接線の方程式は
 $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ より
 $y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

(7) $f(x) = e \log x$ とすると
 $f'(x) = \frac{e}{x}$ $f'(e) = 1$
よって、接線の方程式は
 $y - e = x - e$ より $y = x$

(2) $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2$ とすると
 $f'(x) = -4x^3 + 6x$ $f'(-1) = -2$
よって、接線の方程式は
 $y - 4 = -2(x + 1)$ より $y = -2x + 2$

(4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ とすると
 $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$ $f'(2) = 2$
よって、接線の方程式は
 $y - 1 = 2(x - 2)$ より $y = 2x - 3$

(6) $f(x) = \tan \frac{x}{2}$ とすると
 $f'(x) = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
よって、接線の方程式は
 $y - 1 = x - \frac{\pi}{2}$ より
 $y = x + 1 - \frac{\pi}{2}$

(8) $f(x) = e^{2x}$ とすると
 $f'(x) = 2e^{2x}$ $f'(1) = 2e^2$
よって、接線の方程式は
 $y - e^2 = 2e^2(x - 1)$ より $y = 2e^2x - e^2$

(1) $f(x) = x^2 - 3x$, $f'(x) = 2x - 3$ だから

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c), \quad 1 < c < 3 \quad \text{より}$$

$$\frac{0 - (-2)}{2} = 2c - 3 \quad \therefore \quad c = 2 \quad (1 < c < 3 \text{ を満たす})$$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ だから

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(c), \quad 1 < c < 4 \quad \text{より}$$

$$\frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{2\sqrt{c}}, \quad 2\sqrt{c} = 3 \quad \therefore \quad c = \frac{9}{4} \quad (1 < c < 4 \text{ を満たす})$$

(3) $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$ だから

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c), \quad 0 < c < 1 \quad \text{より}$$

$$e - 1 = e^c \quad \therefore \quad c = \log(e - 1)$$

(4) $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$ だから

$$\frac{f(\pi) - f(0)}{\pi - 0} = f'(c), \quad 0 < c < \pi \quad \text{より}$$

$$\frac{0 - 0}{\pi} = \cos c \quad \therefore \quad c = \frac{\pi}{2} \quad (0 < c < \pi \text{ を満たす})$$

120 $f(x) = \cos x$ は $x > 0$ で微分可能で $f'(x) = -\sin x$ 区間 $[\alpha, \beta]$

において、平均値の定理から

$$\frac{\cos \beta - \cos \alpha}{\beta - \alpha} = -\sin c, \quad \alpha < c < \beta \quad \text{となる } c \text{ が存在する。}$$

$$\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\beta - \alpha} = \sin c \quad \text{とすると } 0 < c < \frac{\pi}{2} \quad \text{より } \sin c < 1$$

よって, $\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\beta - \alpha} < 1$ より $\cos \alpha = \cos \beta < \beta - \alpha$ が成り立つ。

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4x^2 + 12$$

$$f'(x) = x^3 - 8x = x(x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2})$$

これより、増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	12	$\searrow$	-4	$\nearrow$

よって

$x=0$ のとき 極大値 12

$x=\pm 2\sqrt{2}$ のとき 極小値 -4

$$(2) \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+3) - (x+1) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = -\frac{(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

これより、増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

よって

$x=1$ のとき 極大値 $\frac{1}{2}$

$x=-3$ のとき 極小値 $-\frac{1}{6}$

$$(3) \quad f(x) = -x + \frac{1}{x^3}$$

$$f'(x) = -1 - \frac{3}{x^4} = -\frac{x^4+3}{x^4} < 0$$

$\therefore f(x)$ は $x < 0$, $0 < x$ の範囲で減少し、極値はない。

$$(4) \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x-1} - x \cdot \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}}{x-1} = \frac{x-2}{2\sqrt{x-1}(x-1)}$$

これより，増減表は次のようになる。

x	1	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			2	

よって， $x=2$ のとき極小値 2

$$(5) \quad f(x) = x^2 e^{-2x}$$

$$f'(x) = 2xe^{2x} + x^2 \cdot (-2e^{-2x}) = -2x(x-1)e^{-2x}$$

これより，増減表は次のようになる。

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		0		$\frac{1}{e^2}$	

よって

$x=1$ のとき極大値 $\frac{1}{e^2}$

$x=0$ のとき極小値 0

$$(6) \quad f(x) = \frac{1 + \log x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1 + \log x) \cdot 1}{x^2} = -\frac{\log x}{x^2}$$

これより，増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			1	

よって $x=1$ のとき極大値 1

$$(7) \quad f(x) = 3x - 2 \cos x$$

$$f'(x) = 3 + 2 \sin x > 0$$

よって， $f(x)$ はつねに増加し，極値はない。

$$(8) \quad f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

定義域は $x^2 - 1 \geq 0$ より $x \leq -1$, $1 \leq x$ であり

$x \leq -1$ のとき $f'(x) \leq 0$ だから $f(x)$ は減少し

$x \geq 1$ のとき $f'(x) \geq 0$ だから $f(x)$ は増加する。また、極値はない。

122

$$(1) \quad f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$$

増減表は次のようになる。

x	-2	...	0	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	3	↘	-1	↗	3

よって、 $x = -2$, 1 のとき最大値 3

$x = 0$ のとき最小値 -1

$$(2) \quad f(x) = -2x^3 + 6x$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x + 1)(x - 1)$$

増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	4	↘	-4

よって、 $x = 1$ のとき最大値 4

$x = 2$ のとき最小値 -4

$$(3) \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 3$$

$$f'(x) = -x^3 + 4x = -x(x + 2)(x - 2)$$

x	-3	...	-2	...	0	...	2	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	↗	7	↘	3	↗	7	↘	$\frac{3}{4}$

よって、 $x = 2$, -2 のとき最大値 7

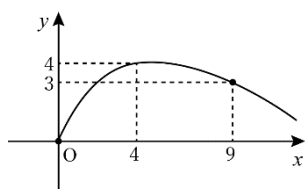
$x = 3$, -3 のとき最小値 $\frac{3}{4}$

$$(1) \quad f(x) = -x + 4\sqrt{x}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$$

増減表は次のようになる。

x	0	...	4	...	9
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	4	↘	3



よって、 $x=4$ のとき最大値 4

$x=0$ のとき最小値 0

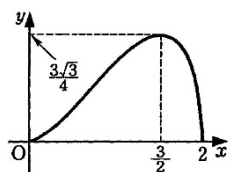
$$(2) \quad f(x) = x\sqrt{2x-x^2} \quad \text{の定義域は}$$

$$2x - x^2 \geq 0 \quad \text{より} \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{2x-x^2} + x \cdot \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} \\ &= -\frac{x(2x-3)}{\sqrt{2x-x^2}} \end{aligned}$$

増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{3}{2}$	...	2
$f'(x)$	↗	+	0	-	↘
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0



よって $x = \frac{3}{2}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

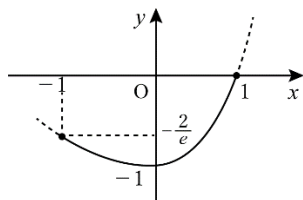
$x=0, 2$ のとき最小値 0

$$(3) \quad f(x) = (x-1)e^x$$

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2}{e}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0



よって、 $x=1$ のとき最大値 0

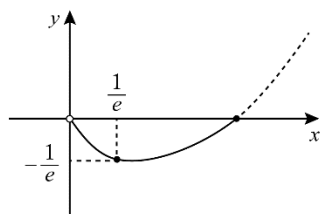
$x=0$ のとき最小値 -1

$$(4) \quad f(x) = x \log x$$

$$f'(x) = \log x + 1 \quad f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \frac{1}{e}$$

増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0



よって、 $x=1$ のとき最大値 0

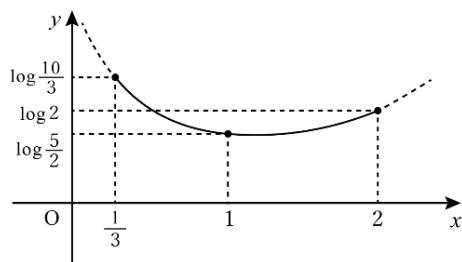
$x = \frac{1}{e}$ のとき最小値 $-\frac{1}{e}$

(5) $f(x) = \log(x^2 + 1) - \log x$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x^2 + 1)}$$

増減表は次のようになる。

x	$\frac{1}{3}$		1		2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\log \frac{10}{3}$	$\searrow$	$\log 2$	$\nearrow$	$\log \frac{5}{2}$



よって、 $x = \frac{1}{3}$ のとき最大値 $\log \frac{10}{3}$

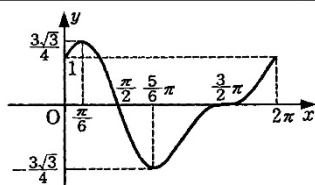
$x = 1$ のとき最小値 $\log 2$

(6) $f(x) = \cos x (1 + \sin x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x (1 + \sin x) + \cos^2 x \\ &= -\sin x - \sin^2 x + (1 - \sin^2 x) \\ &= -2\sin^2 x - \sin x + 1 = -(2\sin x - 1)(\sin x + 1) \\ f'(x) &= 0 \quad x = \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	0	+	+
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	1



よって $x = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$x = \frac{5}{6}\pi$ のとき最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$$(1) \quad y = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad y' = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	0	...	1	...
y'	+	/	+	0	-	/	-
y	↗	/	↗	-1	↘	/	↘

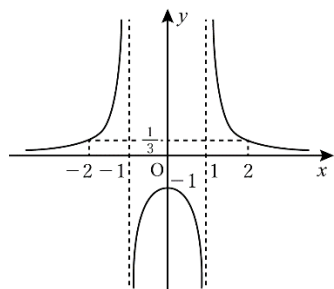
$x = 0$ のとき極大値 -1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x^2 - 1} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x^2 - 1} = \infty$$

より漸近線は直線 $x = 1$, $x = -1$, x 軸



$$(2) \quad y = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad y' = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2 + 1)^2}$$

増減表は次のようになる。

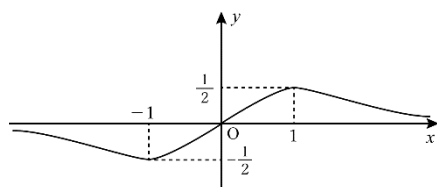
x	...	-1	...	1	...
y'	-	0	+	0	-
y	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

$x = 1$ のとき極大値 $\frac{1}{2}$

$x = -1$ のとき極小値 $-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

より漸近線は x 軸



$$(3) \quad y = \frac{x}{(x-1)^2}, \quad y' = \frac{1 \cdot (x-1)^2 - x \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

増減表は次のようになる。

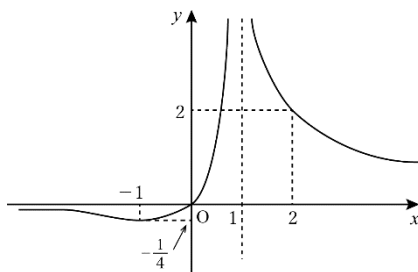
x	...	-1	...	1	...
y'	-	0	+	/	-
y	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	/	↘

$x = -1$ のとき極小値 $-\frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \infty$$

より漸近線は直線 $x = 1$, x 軸



125

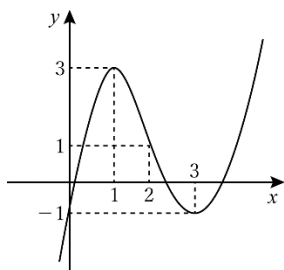
$$(1) \quad y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$y'' = 6x - 12 = 6(x-2)$$

増減表は次のようになる。

x	...	1	...	2	...	3	...
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y	↗	3	↘	1	↘	-1	↗



$x = 1$ のとき極大値 3

$x = 3$ のとき極小値 -1

変曲点(2, 1)

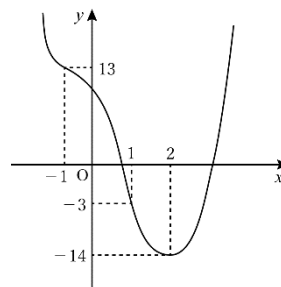
$$(2) \quad y = x^4 - 6x^2 - 8x + 10$$

$$y' = 4x^3 - 12x - 8 = 4(x+1)^2(x-2)$$

$$y'' = 12x^2 - 12 = 12(x+1)(x-1)$$

増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	1	...	2	...
y'	-	-	-	-	-	0	+
y''	+	0	-	0	+	+	+
y	↘	13	↘	-3	↘	-14	↗



$x = 2$ のとき極小値 -14

極大値はない。

変曲点(-1, 13), (1, -3)

$$(3) \quad y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x+1} = x + 2 + \frac{1}{x+1}$$

$$y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2}{(x+1)^3}$$

増減表は次のようになる。

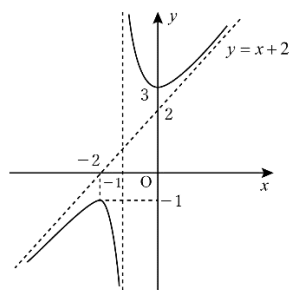
x	...	-2	...	-1	...	0	...
y'	+	0	-	/	-	0	+
y''	-	-	-	/	+	+	+
y	$\nearrow$	-1	$\searrow$	/	$\searrow$	3	$\nearrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x - 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2 + 3x + 3}{x+1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2 + 3x + 3}{x+1} = -\infty$$



$x = -2$ のとき極大値 -1

$x = 0$ のとき極小値 3

変曲点はない。

漸近線は直線 $y = x + 2$ ，直線 $x = -1$

$$(4) \quad y = (x+1)e^x$$

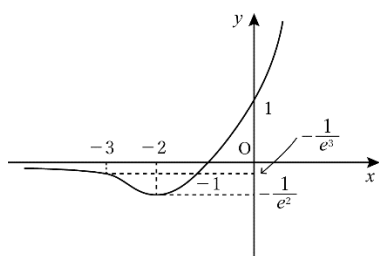
$$y' = e^x + (x+1)e^x = e^x(x+2)$$

$$y'' = e^x + e^x(x+2) = e^x(x+3)$$

増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\searrow$	$-\frac{2}{e^3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{e^2}$	$\nearrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)e^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^x = 0$$



$$x = -2 \text{ のとき極小値 } -\frac{1}{e^2}$$

$$\text{変曲点} \left(-3, -\frac{2}{e^3} \right), \text{ 漸近線は } x\text{軸}$$

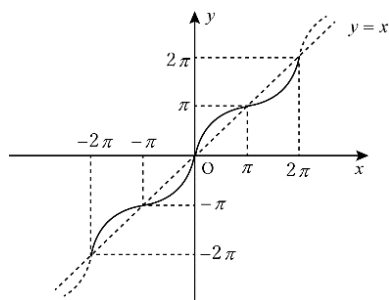
$$(5) \quad y = x + \sin x$$

$$y' = 1 + \cos x \geq 0, \quad y'' = -\sin x$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$$

増減表は次のようになる。

x	-2π	$\cdots$	$-\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
y'	0	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	
y''	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-2π	$\nearrow$	$-\pi$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	π	$\nearrow$	2π



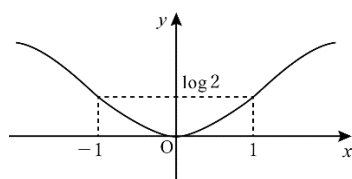
(6) $y = \log(x^2 + 1)$

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad y'' = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2 + 1)^2}$$

増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	0	...	1	...
y'	-	-	-	0	+	+	+
y''	-	0	-	+	+	0	+
y	$\curvearrowright$	$\log 2$	$\curvearrowleft$	0	$\curvearrowright$	$\log 2$	$\curvearrowright$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log(x^2 + 1) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log(x^2 + 1) = \infty$$



126

$y' = -\frac{2}{x^3}$ より, 点 $A\left(t, \frac{1}{t^2}\right)$ における接線の方程式は

$$y - \frac{1}{t^2} = -\frac{2}{t^3}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{2}{t^3}x + \frac{3}{t^2}$$

よって, P, Qの座標は $P\left(\frac{3}{2}t, 0\right), Q\left(0, \frac{3}{t^2}\right)$

ここで, $PQ^2 = f(t)$ とすると ($t > 0$)

$$f(t) = \left(\frac{3}{2}t\right)^2 + \left(\frac{3}{t^2}\right)^2 = \frac{9}{4}\left(t^2 + \frac{4}{t^4}\right)$$

$$f'(t) = \frac{9}{4}\left(2t - \frac{16}{t^5}\right) = \frac{9(t^6 - 8)}{2t^5}$$

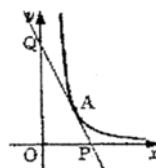
$$f'(t) = 0 \text{ を解くと } t^6 = 8 = 2^3 \text{ より } t^2 = 2$$

$$t > 0 \text{ から } t = \sqrt{2}$$

増減表は次のようになる。

t	0	...	$\sqrt{2}$	...
$f'(t)$	$\searrow$	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$

$$\text{よって, } t = \sqrt{2} \text{ のとき最小値 } \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



$$(1) \quad f(x) = x^3 + x^2 + 8 - 4x^2 - 4 \\ = x^3 - 3x + 4 \quad \text{とおくと}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

増減表は次のようになる。

x	0	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$x > 0$ のとき $f(x) \geq f(2)$ だから

$$f(x) \geq 0 \quad \text{である。}$$

$$\text{よって, } x^3 + x^2 + 8 \geq 4x^2 + 4$$

$$(2) \quad f(x) = 1 + x - 2\log(1+x)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x} = \frac{x-1}{1+x}$$

増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$2-2\log 2$	$\nearrow$

$$f(1) = 2 - 2\log 2 = 2(1 - \log 2) > 0 \quad (0 < \log 2 < 1 \text{ より})$$

$x > 0$ のとき $f(x) \geq f(1)$ だから $f(x) > 0$ である。

$$\text{よって, } 1+x > 2\log(1+x)$$

$$(1) \quad x^3 - 3x + 1 = k \text{ として}$$

$y' = x^3 - 3x + 1$ と $y = k$ のグラフで考える。

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	1	...
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

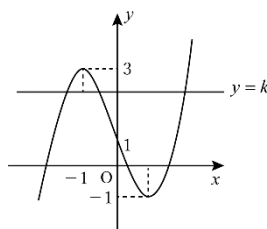
グラフは右図のようになる。

右のグラフから、異なる実数解の個数は

$k < -1$, $3 < k$ のとき 1 個

$k = -1$, $k = 3$ のとき 2 個

$-1 < k < 3$ のとき 3 個



(2)

$$-2\log x - \frac{1}{2}x^2 + 3x = k \text{ として,}$$

$y = -2\log x - \frac{1}{2}x^2 + 3x$ と $y = k$ のグラフで考える。

$$y' = -\frac{2}{x} - x + 3 = -\frac{(x-2)(x-1)}{x}$$

増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...	2	...
y'		-	0	+	0	-
y		$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$4-2\log 2$	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(-2\log x - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-2\log x - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) = -\infty$$

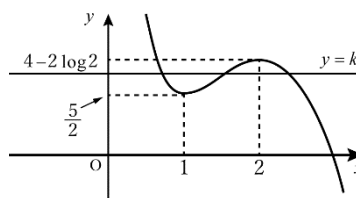
以上より、グラフは右図のようになる。

右のグラフから、異なる実数解の個数は

$k < \frac{5}{2}$, $4-2\log 2 < k$ のとき 1 個

$k = \frac{5}{2}$, $4-2\log 2$ のとき 2 個

$\frac{5}{2} < k < 4-2\log 2$ のとき 3 個



129

(1) $f(x) = x^3$ とおくと $f'(x) = 3x^2$
 $f(2+0.05) \doteq f(2) + f'(2) \times 0.05$ より
 $2.05^3 \doteq 2^3 + 3 \times 2^2 \times 0.05 = 8.6$

(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ とおくと $f'(x) = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$
 $f(8+0.3) \doteq f(8) + f'(8) \times 0.3$ より
 $\frac{1}{\sqrt[3]{8.3}} \doteq \frac{1}{\sqrt[3]{8}} - \frac{1}{3 \cdot 8\sqrt[3]{8}} \times 0.3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{160} \doteq 0.494$

(3) $f(x) = \sin x$ とおくと $f'(x) = \cos x$
 $58^\circ = 60^\circ - 2^\circ = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{90}$ だから
 $f\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{90}\right) \doteq f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \left(-\frac{\pi}{90}\right)$ より
 $\sin 58^\circ \doteq \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} \times \left(-\frac{\pi}{90}\right)$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{3.1416}{90} \doteq 0.849$

(4) $f(x) = \sqrt{x}$ とおくと $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $6+e = 6 + 2.7182 = 8.7182 = 9 - 0.2818$
 $f(9-0.2818) \doteq f(9) + f'(9) \times (-0.2818)$ より
 $\sqrt{6+e} \doteq 3 + \frac{1}{2 \cdot 3} \times (-0.2818) \doteq 2.953$

130

$$(1) \quad x = t^3 - 3t^2 - 9t \quad \text{より}$$

$$\text{速度 } v \text{ は } v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t - 9$$

$$\text{加速度 } \alpha \text{ は } \alpha = \frac{d^2x}{dt^2} = 6t - 6$$

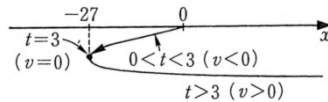
$$(2) \quad v = 3(t+1)(t-3) \quad (t > 0) \text{ より}$$

$$t = 3 \text{ のとき } v = 0$$

$$3 < t \text{ のとき } v > 0$$

$$0 < t < 3 \text{ のとき } v < 0$$

よって、P が運動の向きを変える t の値は $t = 3$



131

$$(1) \quad y = \log x, \quad y' = \frac{1}{x}$$

$$\text{接点の } x \text{ 座標は } \frac{1}{x} = e \quad \therefore \quad x = \frac{1}{e}$$

$$\text{接点は } \left(\frac{1}{e}, -1 \right) \text{ だから}$$

$$y - (-1) = e \left(x - \frac{1}{e} \right) \quad \text{より} \quad y = ex - 2$$

$$(2) \quad \text{接点を } (t, \log t) \text{ とおくと}$$

接線の方程式は

$$y - \log t = \frac{1}{t}(x - t)$$

$$y = \frac{1}{t}x - 1 + \log t$$

原点 $(0, 0)$ を通るから

$$\log t - 1 = 0 \quad \therefore \quad t = e$$

$$\text{よって, } y = \frac{1}{e}x$$

$$132 \quad f(x) = e^x, \quad g(x) = \sqrt{x+k} \quad \text{とすると}$$

$$f'(x) = e^x, \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+k}}$$

点 P の x 座標を α とすると

$$f(\alpha) = g(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f'(\alpha) = g'(\alpha) \quad \text{であるから}$$

$$e^\alpha = \sqrt{\alpha+k} \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad e^\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\alpha+k}} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } e^\alpha = \frac{1}{2e^\alpha} \quad \text{すなわち} \quad e^{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$e^\alpha > 0 \text{ より } e^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{よって } \alpha = \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \log 2$$

$$\textcircled{1} \text{ より } k = e^{2\alpha} - \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 2$$

このとき、求める接線の方程式は

$$y - e^\alpha = e^\alpha(x - \alpha) \quad \text{であるから} \quad y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{1}{2} \log 2 \right)$$

$$\text{すなわち } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4} \log 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

133

$$f(x) = x^2 + ax + b + 6 \log(1+x) \text{ より}$$

$$f'(x) = 2x + a + \frac{6}{1+x}$$

$$f(0) = 3 \text{ より } b = 3$$

$$f'(0) = 0 \text{ より } a + 6 = 0 \text{ だから } a = -6$$

$$\text{このとき } f(x) = x^2 - 6x + 3 + 6 \log(1+x)$$

$$f'(x) = 2x - 6 + \frac{6}{1+x} = \frac{2x(x-2)}{1+x}$$

x	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	3	↘		↗

上の増減表より, $x = 0$ で極大値 3 をとり, 条件をみたす。

よって $a = -6, b = 3$

134

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2-x+1} \text{ より}$$

$$f'(x) = \frac{a(x^2-x+1) - (ax+b)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-ax^2-2bx+a+b}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f(2) = 1 \text{ より } 2a + b = 3$$

$$f'(2) = 0 \text{ より } a + b = 0$$

これを解いて $a = 3, b = -3$

$$\text{このとき, } f(x) = \frac{3x-3}{x^2-x+1}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2+6x}{(x^2-x+1)^2} = -\frac{3x(x-2)}{(x^2-x+1)^2}$$

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-3	↗	1	↘

上の増減表より, $x = 2$ で極大値 1 をとり, 条件をみたす。

よって $a = 3, b = -3$

また, 極小値は -3 ($x = 0$ のとき)

$$y = |x|e^x$$

(i) $x \geq 0$ のとき $y = xe^x$

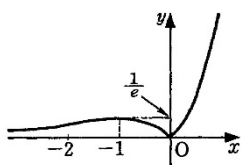
$$y' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

(ii) $x < 0$ のとき $y = -xe^x$

$$y' = -e^x - xe^x = -(x+1)e^x$$

増減表をつくると

x	...	-1	...	0	...
y'	+	0	-	/	+
y	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗



$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^x) = 0$$

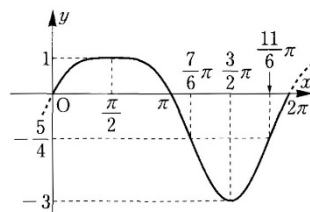
よって $x = 0$ のとき最小値 0, 最大値なし

$$(1) \quad y' = 2 \cos x - 2 \sin x \cos x = 2 \cos x (1 - \sin x)$$

$$y'' = -2 \sin x - 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 2(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)$$

これより, $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で増減表は下記のようなになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π	...	$\frac{7}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	$\frac{11}{6}\pi$	...	2π
y'	+	+	0	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+
y''	-	-	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-
y	0	↗	1	↘	0	↘	$-\frac{5}{4}$	↖	-3	↗	$-\frac{5}{4}$	↗	0



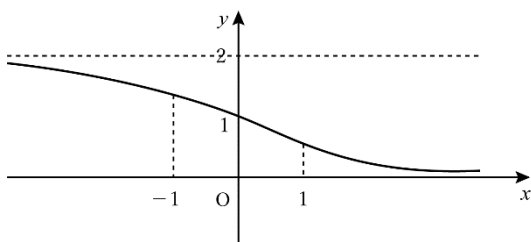
$$(2) \quad y = \frac{2}{1+e^x}, \quad y' = -\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$y' = \frac{-2e^x(1+e^x)^2 + 2e^x \cdot 2(1+e^x) \cdot e^x}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{2e^x(2e^x+1)(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1+e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1+e^x} = 2$$

x	...	0	...
y'	-	-	-
y''	-	0	+
y	↘	1	↘



137 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ とおく

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \\ &= \frac{\cos^3 x - 2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x - \cos x - 1)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(1 - \cos x)(\sin^2 x + \cos x)}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$0 < x < \frac{\pi}{3}$ のとき $f'(x) > 0$ だから $f(x)$

は増加関数である。

$f(0) = 0$ より $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $f(x) > 0$ である。

よって, $\sin x + \cos x > 2x$

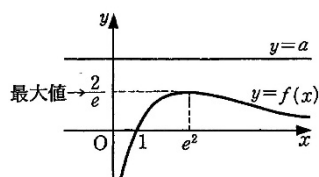
138

$a\sqrt{x} > \log x$ より $a > \frac{\log x}{\sqrt{x}}$... ①

$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ とおくと $f'(x) = \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}}$

$x > 0$ における増減表は

x	0	...	e^2	...
$f'(x)$	/	+	0	-
$f(x)$	/	↗	$\frac{2}{e}$	↘



これから, $f(x)$ の最大値は $f(e^2) = \frac{2}{e}$

よって, $x > 0$ について ① が成り立つ条件は $a > \frac{2}{e}$

$$(1) \quad y = x^2 + \frac{2}{x}$$

$$y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2}$$

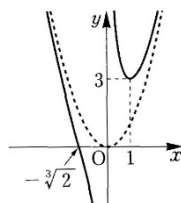
増減表は次のようになる。

x	...	0	...	1	...
y'	-	/	-	0	+
y	↘	/	↘	3	↗

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} y = -\infty$$

以上のことより，グラフは右図のようになる。



(2) $x = 0$ は， $x^3 - ax + 2 = 0$ の解ではないから

$$x^2 + \frac{2}{x} = a \quad \text{と変形し，} \quad y = x^2 + \frac{2}{x} \quad \text{と} \quad y = a$$

のグラフの共有点の個数を調べる。(1) のグラフを利用して

$a < 3$ のとき 1 個

$a = 3$ のとき 2 個

$a > 3$ のとき 3 個

- (1) 台形 PABQ は
- $AP=BQ$
- の等脚台形であり,

上底 $PQ = 2a \cos \theta$, 下底 $AB = 2a$, 高さは $a \sin \theta$ であるから, 面積 S は

$$S = \frac{1}{2} (2a \cos \theta + 2a) \cdot a \sin \theta = a^2 (\cos \theta + 1) \sin \theta$$

(別解) $S = 2 \triangle OAP + \triangle OPQ$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin \theta + \frac{1}{2} a^2 \sin (\pi - 2\theta) = a^2 \left(\sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)$$

$$(2) \quad S' = a^2 \{ -\sin^2 \theta + (\cos \theta + 1) \cos \theta \}$$

$$= a^2 (2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1) = a^2 (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$$

ここで $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より増減表をつくると

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
S'	$\nearrow$	+	0	-	$\searrow$
S	$\nearrow$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$	$\searrow$	$\searrow$

よって, $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき 最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ t 秒後の半径を r cm, 表面積を S cm², 体積を V cm³ とすると

$$S = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{時間 } t \text{ で微分すると}$$

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}, \quad \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \quad \text{より} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{r}{2} \times \frac{dS}{dt}$$

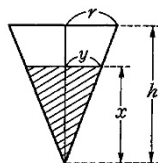
$$\frac{dS}{dt} = 4\pi \text{ で } r = 10 \text{ のときであるから} \quad \frac{dV}{dt} = 20\pi \quad \text{よって } 20\pi \text{ [cm}^3/\text{秒]}$$

t 秒後の水面の高さを x cm, 水面の面積を S cm², 水の量を V cm³ とすると,

このときの水面の半径は $\frac{r}{h}x$ cm であるから

$$S = \pi \left(\frac{r}{h}x \right)^2 = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 \dots \textcircled{1}$$

$$V = \frac{1}{3} Sx = \frac{\pi r^2}{3h^2} x^3 \dots \textcircled{2}$$



②の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\pi r^2}{3h^2} \cdot 3x^2 \frac{dx}{dt} \quad \textcircled{2} \text{より} \quad \frac{\pi r^2}{3h^2} = \frac{V}{x^3} \text{ を代入すると} \\ &= \frac{V}{x^3} \cdot 3x^2 \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{3V}{x} \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

ここで, $V = wt$ より $\frac{dV}{dt} = w$ であるから

$$w = \frac{3V}{x} \frac{dx}{dt} \quad \text{すなわち} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{w}{3V} x \dots \textcircled{3}$$

水の量が v cm³ になったときの水面の高さを x_0 cm とすると

$$v = \frac{\pi r^2}{3h^2} x_0^3 \quad \text{より} \quad x_0 = \left(\frac{3h^2 v}{\pi r^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

よって, このときの水面の上昇する速度は, ③より

$$\frac{dx}{dt} = \frac{w}{3v} x_0 = \frac{w}{3v} \left(\frac{3h^2 v}{\pi r^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \left(\frac{3h^2}{\pi r^2 v^2} \right)^{\frac{1}{3}} w$$

また, ①の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot 2x \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{3V}{x^3} \cdot 2x \frac{w}{3V} x = \frac{2w}{x} \end{aligned}$$

よって, 水の量が v cm³ になったときの水面の広がる速度は

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2w}{x_0} = 2 \left(\frac{\pi r^2}{3h^2 v} \right)^{\frac{1}{3}} w \text{ cm}^2 / \text{秒}$$

2章の問題

1

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} (1+3h)^{\frac{1}{h}} \text{ において, } 3h=t \text{ とおくと}$$

$$h = \frac{t}{3} \text{ で, } h \rightarrow 0 \text{ のとき } t \rightarrow 0 \text{ である。}$$

$$\text{与式} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{3}{t}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^3 = e^3$$

$$(2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} (1-2h)^{\frac{1}{h}} \text{ において, } -2h=t \text{ とおくと}$$

$$h = -\frac{t}{2} \text{ で, } h \rightarrow 0 \text{ のとき } t \rightarrow 0 \text{ である。}$$

$$\text{与式} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{2}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \{ \log(x+2) - \log x \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 + \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$$

$$\frac{2}{x} = t \text{ とおくと, } x = \frac{2}{t} \text{ で}$$

$$x \rightarrow \infty \text{ のとき } t \rightarrow 0 \text{ である。}$$

$$\text{与式} = \lim_{t \rightarrow 0} \log (1+t)^{\frac{2}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \log \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^2$$

$$= \log e^2 = 2$$

$$(4) \quad e^x - 1 = h \text{ とおくと, } e^x = 1+h \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$x \rightarrow 0 \text{ のとき } e^x \rightarrow 1 \text{ だから } h \rightarrow 0$$

$$\textcircled{1} \text{ の両辺の自然対数をとると}$$

$$x = \log(1+h)$$

$$\text{与式} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\log(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{h} \log(1+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\log(1+h)^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{\log e} = 1$$

2

$$(1) \quad b \leq 0 \text{ のとき与式は } \infty \text{ に発散するから } b > 0$$

$$\text{与式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+ax} - bx - 1)(\sqrt{x^2+ax} + bx + 1)}{\sqrt{x^2+ax} + bx + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax - (b^2x^2 + 2bx + 1)}{\sqrt{x^2+ax} + bx + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-b^2)x^2 + (a-2b)x - 1}{\sqrt{x^2+ax} + bx + c}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-b^2)x + (a-2b) - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} + b + \frac{c}{x^2}}$$

$$\text{これが収束するためには } 1-b^2 = 0$$

$$b > 0 \text{ だから } b=1, \text{ このとき}$$

$$\text{与式} = \frac{a-2b}{1+b} = \frac{a-2}{2} = 3$$

$$\therefore a=8, \quad b=1$$

(2) 分母について $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ だから

等式が成り立つには, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (ax - b) = \frac{\pi}{6}a - b = 0$

$\therefore b = \frac{\pi}{6}a$ を代入すると

$$\text{与式} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{ax - \frac{\pi}{6}a}{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{a\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$x - \frac{\pi}{6} = \theta$ とおくと $x \rightarrow \frac{\pi}{6}$ のとき $\theta \rightarrow 0$

$$\therefore \text{与式} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{a\theta}{\sin 2\theta} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{2} \text{ より } a = 1, \quad b = \frac{\pi}{6}$$

3 $x = -1$ で連続であるためには

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ が成り立てばよい。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2 - x + 1)}{\cancel{x+1}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\therefore f(-1) = a = 3$$

4

$$(1) \quad y = x\sqrt{1+e^x}$$

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{1+e^x} + x \cdot \frac{1}{2}(1+e^x)^{-\frac{1}{2}} e^x \\ &= \frac{2(1+e^x) + xe^x}{2\sqrt{1+e^x}} = \frac{(x+2)e^x + 2}{2\sqrt{1+e^x}} \end{aligned}$$

$$(3) \quad y = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{(x + \sqrt{x^2 + 1})\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$(2) \quad y = \log(\log x)$$

$$y' = \frac{(\log x)'}{\log x} = \frac{1}{x \log x}$$

$$(4) \quad y = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} y' &= 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(5) $y = 2^{\sin x}$ の両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log 2^{\sin x} = (\log 2) \sin x$$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y} = (\log 2) \cos x$$

$$y' = (\log 2) 2^{\sin x} \cos x$$

$$(6) \quad y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{-\sin x \cdot \sqrt{x} - \cos x \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{x}$$

$$= -\frac{2x \sin x + \cos x}{2x\sqrt{x}}$$

5 $f(x) = ax^2$, $y(x) = \log x$ とおく。

①, ②の接点を $x = t$ とすると

$$f'(t) = g'(t), \quad g'(t) = y(t) \text{ が成り立つ。}$$

$$f'(x) = 2ax, \quad g'(x) = \frac{1}{x} \text{ だから}$$

$$f(t) = g'(t) \text{ より } 2at = \frac{1}{x} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$f(t) = g'(t) \text{ より } at^2 = \log t \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

③より $at^2 = \frac{1}{2}$, ④に代入して

$$\log t = \frac{1}{2} \text{ より } t = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

よって, $a = \frac{1}{2e}$, 接点は $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right)$,

接線の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}}(x - \sqrt{e})$$

$$\text{よって, } y = \frac{1}{\sqrt{e}}x - \frac{1}{2}$$

6

$$(1) \quad f(x) = x \sin x + \cos x + 1$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x$$

$$= x \cos x$$

$$f'(x) = 1 \text{ とすると } x = \frac{\pi}{2}$$

増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	2	↗	$\frac{\pi}{2} + 1$	↘	0

よって, $x = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\frac{\pi}{2} + 1$

$x = \pi$ のとき最小値 0

$$\begin{aligned}
 (2) \quad f(x) &= \frac{\sin x}{2 - \sqrt{3} \cos x} \\
 f'(x) &= \frac{\cos x(2 - \sqrt{3} \cos x) - \sin x(\sqrt{3} \sin x)}{(2 - \sqrt{3} \cos x)^2} \\
 &= \frac{2 \cos x + \sqrt{3}(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(2 - \sqrt{3} \cos x)^2} \\
 &= \frac{2 \cos x - \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3} \cos x)^2}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \frac{\pi}{6}$$

増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

よって、 $x = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値 1

$x = 0, \pi$ のとき最小値 0

$$\begin{aligned}
 7 \quad f(x) &= \frac{\log(x+1)}{x} \\
 f'(x) &= \frac{\frac{1}{x+1} \cdot x - \log(x+1)}{x^2} \\
 &= \frac{x - (x+1)\log(x+1)}{x^2(x+1)}
 \end{aligned}$$

ここで、 $0 < x < \pi$ だから $x^2(x+1) > 0$

分子を $g(x) = x - (x+1)\log(x+1)$ とおくと

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 1 - \log(x+1) - (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} \\
 &= -\log(x+1) < 0
 \end{aligned}$$

ゆえに、 $0 < x < \pi$ で $f(x) < 0$ だから

$f(x)$ は減少関数であり

$0 < a < b$ のとき $f(a) > f(b)$ が成り立つ。

$$\frac{\log(b+1)}{b} < \frac{\log(a+1)}{a}$$

$$a \log(b+1) < b \log(a+1)$$

$$\log(b+1)^a < \log(a+1)^b$$

底は e で $e > 1$

よって、 $(b+1)^a < (a+1)^b$ が成り立つ。

8

$$(1) \quad y' = ae^{ax} \sin bx + e^{ax} \cdot b \cos bx = e^{ax} (a \sin bx + b \cos bx)$$

$$y'' = ae^{ax} (a \sin bx + b \cos bx) + e^{ax} (ab \cos bx - b^2 \sin bx) \\ = e^{ax} \{ (a^2 - b^2) \sin bx + 2ab \cos bx \}$$

$$(2) \quad y' = ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx = ay + be^{ax} \cos bx \quad \therefore e^{ax} \cos bx = \frac{y' - ay}{b}$$

$$y'' = (a^2 - b^2) e^{ax} \sin bx + 2abe^{ax} \cos bx = (a^2 - b^2) y + 2ab \cdot \frac{y' - ay}{b} \\ = 2ay' - (a^2 + b^2) y$$

9

$$(1) \quad f(x) = (\log x - 1) \log x \quad \text{まず, 真数条件より } x > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log x + (\log x - 1) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \log x - 1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - (2 \log x - 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{3 - 2 \log x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{は} \quad 2 \log x - 1 = 0 \quad \text{より} \quad \log x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \sqrt{e}$$

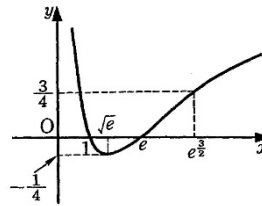
$$f''(x) = 0 \quad \text{は} \quad 3 - 2 \log x = 0 \quad \text{より} \quad \log x = \frac{3}{2} \quad \therefore x = e^{\frac{3}{2}}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	$\sqrt{e}$	...	$e^{\frac{3}{2}}$	...
$f'(x)$		-	0	+	+	+
$f''(x)$		+	+	+	0	-
$f(x)$		↘	極小	↗	変曲点	↗

$$\text{極小値} \quad f(\sqrt{e}) = -\frac{1}{4}$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{4} \quad \text{より} \quad \text{変曲点} \left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{4}\right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$$

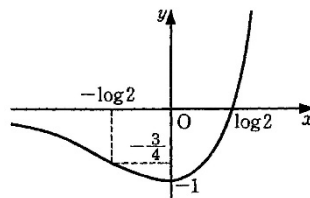


これより, グラフは右図のようになる。

$$\begin{aligned}
 (2) \quad f(x) &= e^{2x} - 2e^x \\
 f'(x) &= 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1) \\
 f''(x) &= 4e^{2x} - 2e^x = 2e^x(2e^x - 1) \\
 f'(x) = 0 &\text{ は } e^x - 1 = 0 \text{ より } x = 0 \\
 f''(x) = 0 &\text{ は } 2e^x - 1 = 0 \text{ より } e^x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = -\log 2
 \end{aligned}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	$-\log 2$	...	0	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	$\searrow$	変曲点	$\swarrow$	極小	$\nearrow$



$$\text{極小値 } f(0) = -1$$

$$f(-\log 2) = -\frac{3}{4} \text{ より, 変曲点 } \left(-\log 2, -\frac{3}{4}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

これより, グラフは右図のようになる。

10

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(x) &= (x+c)e^{-x^2} \\
 f'(x) &= e^{-x^2} + (x+c)(-2x)e^{-x^2} = (1-2cx-2x^2)e^{-x^2} \\
 x=1 &\text{ で極値をとるので} \\
 f'(1) &= (1-2c-2)e^{-1} = 0 \quad \therefore c = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad c = -\frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$$

$$f'(x) = (1+x-2x^2)e^{-x^2} = -(2x+1)(x-1)e^{-x^2}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	$-\frac{1}{2}$	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = 0$$

$$\text{極小値 } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -e^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$$

$$\text{極大値 } f(1) = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e}$$

$$x < -\frac{1}{2}, \quad 1 < x \text{ で減少}$$

$$-\frac{1}{2} < x < 1 \text{ で増加}$$

$$(3) \quad -\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \leq k \leq \frac{1}{2e}$$

(1) [証明]

 $x > 0$ より

$$f(x) = (x+1) \log \frac{x+1}{x} = (x+1) \log(x+1) - (x+1) \log x$$

$$f'(x) = \log(x+1) + \frac{x+1}{x+1} - \log x - \frac{x+1}{x} = \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x} = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$$

ゆえに、 $f'(x)$ は増加関数であり

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right\} = 0$$

よって $x > 0$ において $f'(x) < 0$ だから $f(x)$ は単調減少関数である。(証明終)(2) $f(x) = (x+1) \log \frac{x+1}{x} = (x+1) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ だから

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (x+1) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \infty,$$

 $t = \frac{1}{x}$ とおくと $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow +0$ だから

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{1}{t} + 1 \right) \log(1+t) = \log(1+t)^{\frac{1}{t}+1} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \left\{ \log(1+t)^{\frac{1}{t}} + \log(1+t) \right\} = \log e + \log 1 = 1 \end{aligned}$$

(3) [証明]

 $f(x)$ は減少関数であり、 $x > 0$ で連続である。

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \left(\frac{1}{e^2} + 1\right) \log(1 + e^2) > \log e^2 = 2$$

$$f(1) = 2 \log 2 < 2 \cdot \log e = 2$$

よって、中間値の定理より $f(x) = 2$ を満たす x が $\frac{1}{e^2} < x < 1$ の範囲にただ1つ存在する。(証明終)

AP 間の距離は $AP = \sqrt{x^2 + 9}$

PC 間の距離は $PC = 6 - x$

A から C まで到着するのにかかる時間を $f(x)$ とすると

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{2} + \frac{6 - x}{4}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (x^2 + 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - \frac{1}{4} \\ &= \frac{2x - \sqrt{x^2 + 9}}{4\sqrt{x^2 + 9}} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とすると

$$2x = \sqrt{x^2 + 9} \quad (x > 0)$$

$$4x^2 = x^2 + 9, \quad x^2 = 3 \quad \therefore \quad x = \sqrt{3}$$

よって、B から $\sqrt{3}$ km 離れた地点にボートを着けるのが一番早い。