２章　微分法

１節　関数の極限

A 問題

60

(1) $\lim_{x\to 2}\left(2x^2-3x-4\right)=2\cdot 2^2-3\cdot 2-4=-2$

(2) $\lim_{x\to -1}\left(x^3-2x+2\right)=\left(-1\right)^3-2\cdot\left(-1\right)+2=3$

(3) $\lim_{x\to 1}\sqrt{3x-1}=\sqrt{3\cdot 1-1}=\sqrt{2}$

(4) $\lim_{x\to -2}\sqrt{2-x}=\sqrt{2-\left(-2\right)}=2$

61

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(x+2\right)}{2\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{2}=1$

(2) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(x+3\right)\cancel{\left(x-3\right)}}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to 3}\left(x+3\right)=6$

(3) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{\left(x+2\right)}\left(x-3\right)}{\cancel{x+2}}=\lim_{x\to -2}\left(x-3\right)=-5$

62

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x+2\right)\cancel{\left(x-1\right)}}{x\cancel{\left(x-1\right)}}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}=3$

(2) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{\left(x+1\right)}\left(x^2-x+1\right)}{\cancel{x+1}}=\lim_{x\to -1}\left(x^2-x+1\right)=3$

(3) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x+1\right)\cancel{\left(x-2\right)^2}}{\cancel{\left(x-2\right)^2}}=\lim_{x\to 2}\left(x+1\right)=3$

63

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x}}{x+1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(2+\frac{4}{x-2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{2\cancel{x}}{x-2}\right)=-1$

64

(1) $\displaystyle \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{\left(x-2\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{\left(x-2\right)}\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$

$\displaystyle =\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x+11}-3}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{\left(\sqrt{x+11}-3\right)\left(\sqrt{x+11}+3\right)}{\left(x+2\right)\left(\sqrt{x+11}+3\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{\left(x+2\right)}\left(\sqrt{x+11}+3\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{1}{\sqrt{x+11}+3}$

$\displaystyle =\frac{1}{6}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to1}\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{3x+1}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(2\sqrt{x}-\sqrt{3x+1}\right)\left(2\sqrt{x}+\sqrt{3x+1}\right)}{\left(x-1\right)\left(2\sqrt{x}+\sqrt{3x+1}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{\left(x-1\right)}\left(2\sqrt{x}+\sqrt{3x+1}\right)}$

$\displaystyle =\lim_{x\to1}\frac{1}{2\sqrt{x}+\sqrt{3x+1}}=\frac{1}{4}$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to3}\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{2x+3}}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{2x+3}\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{2x+3}\right)}{\left(x-3\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{2x+3}\right)}=\lim_{x\to3}\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{\left(x-3\right)}\left(\sqrt{3x}+\sqrt{2x+3}\right)}$

$\displaystyle =\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{2x+3}}=\frac{1}{6}$

65

(1) 分母について，$\displaystyle \lim_{x\to1}\left(x-1\right)=0$ だから

等式が成り立つには $\displaystyle \lim_{x\to1}\left(x^2+ax+b\right)=0$ ∴ $1+a+b=0$ ∴ $b=-a-1$ …①

∴ $\displaystyle \lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+\left(-a-1\right)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{\left(x-1\right)}\left(x+a+1\right)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to1}\left(x+a+1\right)=4$

∴ $a+2=4$ ∴ $a=2$ これを①に代入して $b=-3$

以上より　$a=2$，$b=-3$

(2) 分母について，$\displaystyle \lim_{x\to2}\left(x-2\right)=0$ だから

等式が成り立つには $\displaystyle \lim_{x\to2}\left(x^2+ax+b\right)=0$ ∴ $4+2a+b=0$ ∴ $b=-2a-4$ …①

∴ $\displaystyle \lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+\left(-2a-4\right)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{\left(x-2\right)}\left(x+a+2\right)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to2}\left(x+a+2\right)=-1$

∴ $a+4=-1$ ∴ $a=-5$ これを①に代入して $b=6$

以上より　$a=-5$，$b=6$

(3) 分母について， $\lim\limits_{x\to-2}\left(x+2\right)=0$ だから

等式が成り立つには $\lim\limits_{x\to-2}\left(a\sqrt{x+3}+b\right)=0$ $\therefore$ $a+b=0$ $\therefore$ $b=-a$ $\cdots$①

$$\therefore\ \lim_{x\to-2}\frac{a\sqrt{x+3}+b}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{a\sqrt{x+3}-a}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{a\cancel{\left(x+2\right)}}{\cancel{\left(x+2\right)}\left(\sqrt{x+3}+1\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{a}{\sqrt{x+3}+1}=1$$

$\therefore$ $\dfrac{a}{2}=1$ $\therefore$ $a=2$ これを①に代入して $b=-2$

以上より　$a=2$，$b=-2$

(4) 分母について， $\lim\limits_{x\to1}\left(x-1\right)=0$ だから

等式が成り立つには $\lim\limits_{x\to1}\left(a\sqrt{x+3}+b\right)=0$ $\therefore$ $2a+b=0$ $\therefore$ $b=-2a$ $\cdots$①

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}-2a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a\cancel{\left(x-1\right)}}{\cancel{\left(x-1\right)}\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{a}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=1$$

$\therefore$ $\dfrac{a}{4}=1$ $\therefore$ $a=4$ これを①に代入して $b=-8$

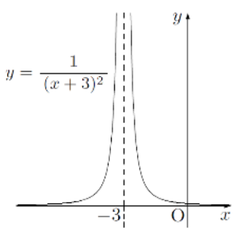
以上より　$a=4$，$b=-8$

66

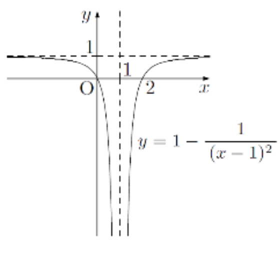
(1) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1}{\left(x+3\right)^2}=\infty$　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}\right)=-\infty$　　(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+1}{x^2}=\infty$

グラフは下図の通り

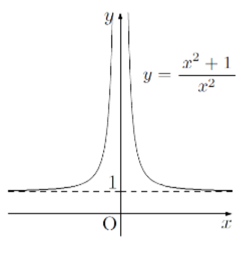
(1)



(2)



(3)



67

(1) $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{\left|x-1\right|}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{-\cancel{\left(x-1\right)}}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to1-0}\left(-1\right)=-1$

(2) $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{\left|1-x\right|}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to1+0}1=1$

(3) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\left|x\right|}{x}=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{-\cancel{x}}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to-0}\left(-1\right)=-1$

68

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2-1}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)=1$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-x^2-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$

(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)=\infty$

69

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}=-1$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^3+1}{x^3+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=8$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2+1\right)x-\left(x+1\right)}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\dfrac{1+\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}\right)=\infty$

70

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}5^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^x=0$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=1$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2^x}=2^\infty=\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{1+2^\infty}=0$

71

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{2}}x=-\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to+0}\log_2\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+0}\left(-\log_2 x\right)=\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}=0$

72

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\cos 2x}=\dfrac{1}{-1}=-1$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\dfrac{1}{x}=\cos 0=1$

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\tan x}=0$ $\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{0}{1}=0\right)$

73

(1) $-1 \leqq \sin\dfrac{1}{x} \leqq 1$ だから $-|x| \leqq x\sin\dfrac{1}{x} \leqq |x|$

$\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0 \quad \therefore \quad \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$

(2) $0 \leqq 1+\cos x \leqq 2$ だから $0 \leqq \dfrac{1+\cos x}{|x|} \leqq \dfrac{2}{|x|}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{2}{x}\right| = 0 \quad \therefore \quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{x} = 0$

74

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x} = \dfrac{2}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(-2x)}{-x} = \lim\limits_{x\to 0} 2\cdot\dfrac{\sin(-2x)}{-2x} = 2$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\left(1-2\sin^2 x\right)}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} 2\cdot\dfrac{\sin x}{x} = 2$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x-\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x\cos 2x}-\dfrac{\sin x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\cos 2x}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}-\dfrac{\sin x}{x}\right) = 2-1 = 1$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x(1+\cos x)}{\cos x(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x(1+\cos x)}{\cos x\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{\cos x}\cdot\dfrac{x}{\sin x} = 2$

75

(1) $x-1=\theta$ とおくと $x=\theta+1$，$x\to 1$ のとき $\theta\to 0$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{x-1} = \lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\pi(\theta+1)}{\theta} = \lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin(\pi\theta+\pi)}{\theta} = \lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{-\sin\pi\theta}{\theta}$

$= \lim\limits_{\theta\to 0} -\pi\cdot\dfrac{\sin\pi\theta}{\pi\theta} = -\pi$

(2) $x-\dfrac{\pi}{2}=\theta$ とおくと $x=\theta+\dfrac{\pi}{2}$，$x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\theta\to 0$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan x = \lim\limits_{\theta\to 0}\theta\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{\theta\to 0}\left(-\dfrac{\theta}{\sin\theta}\cdot\cos\theta\right) = -1$

76

⑴ $\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to0}(x+1)=1$

$f(0)=1$ だから $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$ が成り立つ。

よって，$x=0$ で連続である。

⑵ $\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{-x}=-1$

よって，$\lim_{x\to0} f(x)$ は存在しないから $x=0$ で不連続である。

77

⑴ $(-\infty,\ \infty)$　⑵ $\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi,\ \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$（$n$ は整数）　⑶ $(n,\ n+1)$（n は整数）

78

⑴ $f(x)=x^3-3x^2+3$ とおくと［0，2］において連続であり
$f(0)=3>0$，$f(2)=-1<0$（n は整数） $f(x)$は区間（n は整数）だから
方程式 $f(x)=0$ は $0<x<2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

⑵ $f(x)=2^x-2^{-x}-1$ とおくと $f(x)$は区間［−1，1］において連続であり

$f(-1)=2^{-1}-2-1=-\frac{5}{2}<0$，$f(1)=2-2^{-1}-1=\frac{1}{2}>0$ だから

方程式 $f(x)=0$ は $-1<x<1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

⑶ $f(x)=\log_2 x+2x-3$ とおくと $f(x)$は区間［1，3］
$f(1)=-1<0$，$f(3)=\log_2 3+3>0$ だから
方程式 $f(x)=0$ は $1<x<3$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

⑷ $f(x)=2x-\sin x-2$ とおくと $f(x)$ は区間 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ で連続であり

$f(0)=-2<0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi-3>0$ だから

方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

B 問題

79

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$

(2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2^{-x}}{2^{x}+2^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{2^{2x}+1}=0$

(3) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{4^{x}}{4^{x}+5^{x}}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{5}{4}\right)^{x}}=1$

(4) $$\lim_{x\to\infty}\left\{\log_2\left(2x+3\right)-2\log_2\left(x+1\right)\right\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{2x+3}{\left(x+1\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=-\infty$$

(5) $$\lim_{x\to\infty}\left\{\log_2\sqrt{x}+\log_2\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)\right\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\sqrt{x}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{2}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{2-\dfrac{2}{x}}}$$

$$=\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

80

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\sin x\right)}{\sin x}$　　$\sin x=t$ とおくと　$x\to 0$ のとき $t\to 0$

$\therefore$　与式 $=\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x^0}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{180}x}{x}$　　$\left(1^0=\dfrac{\pi}{180}\ \text{より}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\pi}{180}x}{x\cos\dfrac{\pi}{180}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{180}x}{\dfrac{\pi}{180}x}\cdot\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{180}x}=\frac{\pi}{180}$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{1-\cos x}=\frac{\sin x^2\left(1+\cos x\right)}{\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2\left(1+\cos x\right)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\left(1+\cos x\right)=2$$

81

(1) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-\sqrt{3x-2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(x-\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x+2-4\right)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(x^2-3x+2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{\left(x-2\right)}\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(x-1\right)\cancel{\left(x-2\right)}\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{2+2}{1\cdot\left(2+2\right)}=1$$

(2) $x=-t$ とおくと $x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$

与式 $$=\lim_{t\to\infty}\left\{3\left(-t\right)+\sqrt{9\left(-t\right)^2-4\left(-t\right)}\right\}=\lim_{t\to\infty}\left(-3t+\sqrt{9t^2+4t}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(-3t+\sqrt{9t^2+4t}\right)\left(-3t-\sqrt{9t^2+4t}\right)}{-3t-\sqrt{9t^2+4t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{9t^2-\left(9t^2+4t\right)}{-3t-\sqrt{9t^2+4t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{4}{3+\sqrt{9+\dfrac{4}{t}}}=\frac{4}{3+3}=\frac{2}{3}$$

(3) $$\lim_{x\to\infty}\left(5^x+3^x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[5x\left\{1+\left(\frac{3}{5}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}5\left\{1+\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{x}}\right\}=5$$

(4) $$\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{1-\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{2}\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}{x}$$

$$=\lim_{x\to-0}\frac{-\sqrt{2}\,\sin\dfrac{x}{2}}{2\cdot\dfrac{x}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\left(x\to-0\text{ のとき }\left|\sin\frac{x}{2}\right|=-\sin\frac{x}{2}\right)$$

(5) $$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 4x\sin\left(-x\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{4\sin 4x}{4x}\cdot\frac{\sin x}{x}=8$$

(6) $3\cdot5^x-1<[3\cdot5^x]\leqq 3\cdot5^x$ だから $\dfrac{3\cdot5^x-1}{5^x}<\dfrac{[3\cdot5^x]}{5^x}\leqq\dfrac{3\cdot5^x}{5^x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot5^x-1}{5^x}=\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{5^x}\right)=3$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot5^x}{5^x}=3$$

よって， $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3\cdot5^x]}{5^x}=3$

82　分母について，$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$ だから

等式が成り立つには $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(ax+b\right)=\frac{\pi}{2}a+b=0$　$\therefore$　$b=-\frac{\pi}{2}a\cdots\cdots$①

$$与式=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax-\frac{\pi}{2}a}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}$$

$x-\frac{\pi}{2}=\theta$ とおくと $x\to\frac{\pi}{2}$ のとき $\theta\to 0$

$$与式=\lim_{\theta\to 0}\frac{a\theta}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{a\theta}{-\sin\theta}=-a$$

$\therefore$　$-a=4$ より $a=-4$，①に代入して　$b=2\pi$

83　（ⅰ）より $f\left(x\right)$ が 3 次以上の整式だと発散するから

$f\left(x\right)=ax^2+bx+c$　$(a\neq 0)$ とおける。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\left(a-\frac{a}{x^2+1}+\frac{bx}{x^2+1}+\frac{c}{x^2+1}\right)=a$$

$\therefore$　$a=3$

（ⅱ）より分母について $\lim_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=0$ だから与式が成り立つには

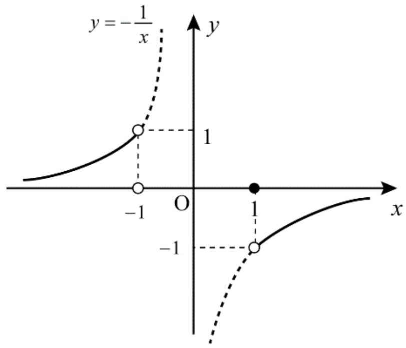
$\lim_{x\to 1}\left(3x^2+bx+c\right)=3+b+c=0$　$\therefore$　$c=-b-3$ を代入して

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+bx-b-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{\left(x-1\right)}\left(3x+b+3\right)}{\cancel{\left(x-1\right)}\left(x+1\right)}=\frac{6+b}{2}$$

$\frac{6+b}{2}=2$ より $b=-2$ このとき $c=-1$

よって，$f\left(x\right)=3x^2-2x-1$

⑴　（ⅰ）$\left|x\right|>1$ $(x<-1,\ 1<x)$ のとき



$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^n}-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^n}+1}=-\frac{1}{x}$$

（ⅱ）$\left|x\right|<1$ $(-1<x<1)$ のとき

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{n-1}}{1+x^n}=1$$

（ⅲ）$x=1$ のとき

$$y=\frac{1-1}{1+1}=0$$

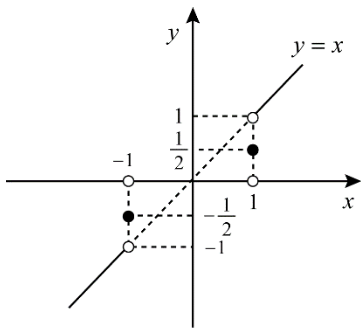
（ⅳ）$x=-1$ のとき

$1+x^n$ は 0 または 2 となるから y は存在しない。

よって，グラフは右の図のようになる。

また， $x=\pm1$ で不連続となり，それ以外は連続である。

⑵　（ⅰ）$\left|x\right|>1$ $(x<-1,\ 1<x)$ のとき



$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\dfrac{1}{x^{2n}}+1}=x$$

（ⅱ）$\left|x\right|<1$ $(-1<x<1)$ のとき

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=0$$

（ⅲ）$x=1$ のとき

$$y=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

（ⅳ）$x=-1$ のとき

$$y=\frac{(-1)^{2n+1}}{1+(-1)^{2n}}=-\frac{1}{2}$$

よって，グラフは右図のようになる。

また， $x=\pm1$ で不連続となり，それ以外は連続である。

85

（ⅰ） $|x|>1$ $(x<-1,\ 1<x)$ のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+a+\dfrac{3}{x^{n-1}}+\dfrac{2a}{x^n}}{\dfrac{1}{x^n}+1}=x+a$$

（ⅱ） $|x|<1$ $(-1<x<1)$ のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+ax^n+3x+2a}{1+x^n}=3x+2a$$

$$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}(x+a)=a+1$$

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}(3x+2a)=2a+3$$

$$f(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+3+2a}{1+1}=\frac{3a+4}{2}$$

$f(x)$ が $x=1$ で連続であるためには

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=f(1)=\lim_{x\to1+0}f(x)$ が成り立てばよい

$2a+3=\dfrac{3a+4}{2}=a+1$　これより　$a=-2$

発展問題

86

⑴ △OPA に正弦定理を適用すると $\angle\mathrm{OPA}=\pi-3\theta$ だから

$$\frac{\mathrm{OA}}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\mathrm{OP}}{\sin2\theta}$$

$$\therefore\quad \mathrm{OP}=\frac{3\sin2\theta}{\sin3\theta}$$

P$(x,\ y)$ とすると

$$x=\mathrm{OP}\cos\theta=\frac{3\sin2\theta\cos\theta}{\sin3\theta}$$

$$y=\mathrm{OP}\sin\theta=\frac{3\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}$$

$$\therefore\quad \mathrm{P}\left(\frac{3\sin2\theta\cos\theta}{\sin3\theta},\ \frac{3\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}\right)$$

⑵ $$\lim_{\theta\to0}\frac{3\sin2\theta\cos\theta}{\sin3\theta}=\lim_{\theta\to0}3\cdot\frac{\dfrac{2\sin2\theta}{2\theta}\cos\theta}{\dfrac{3\sin3\theta}{3\theta}}=3\cdot\frac{2}{3}=2$$

$$\lim_{\theta\to0}\frac{3\sin2\theta\sin\theta}{\sin3\theta}=\lim_{\theta\to0}3\cdot\frac{\dfrac{2\sin2\theta}{2\theta}}{\dfrac{3\sin3\theta}{3\theta}}\sin\theta=0$$

よって，点 P は（2，0）に近づく。

87

⑴　$\triangle \mathrm{OA_1A_2}$ において　$\angle \mathrm{A_1OA_2} = \dfrac{2\pi}{n}$ だから

$$\triangle \mathrm{OA_1A_2} = \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

⑵　$S_n = n \dfrac{1}{2} r^2 \sin \dfrac{2\pi}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} r^2 n \sin \frac{2\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} r^2 n \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2$$