

1 章

2 - 1 数列の極限

A 問題

35

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| (1) 正の無限大に発散 (∞) | (2) 負の無限大に発散 ($-\infty$) |
| (3) 正の無限大に発散 (∞) | (4) 振動 |
| (5) 振動 | (6) 0 に収束 |
| (7) 0 に収束 | (8) 振動 |
| (9) 0 に収束 | |

36

- | | |
|--|---|
| (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 - 3n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(2 - \frac{3}{n} \right) = \infty$ | (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^3 + n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(-1 + \frac{1}{n^2} \right) = -\infty$ |
| (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - 2\sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{n}} \right) = \infty$ | (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 5n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n} - \frac{2}{n^2}} = 1$ |
| (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3 + 5n}{2n^2 - 4n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n + \frac{5}{n}}{2 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}} = -\infty$ | (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(n-2)}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) = 1$ |
| (7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}}} = \infty$ | (8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n + \frac{2}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| (9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n}}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{n}}}{1 + \frac{2}{n}} = 2$ | |

37

- | |
|--|
| (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-3} - \sqrt{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n-3} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n-3} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n-3} + \sqrt{n-1}}$
$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-3) - (n-1)}{\sqrt{n-3} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{n-3} + \sqrt{n-1}} = 0$ |
| (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1})}$
$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}}{(n+3) - (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}}{2} = \infty$ |

(1) 初項 2, 公比 -2 より

$$a_n = 2 \cdot (-2)^{n-1} = -(-2) \cdot (-2)^{n-1} \\ = -(-2)^n \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \{ -(-2)^n \} \text{は振動する}$$

(2) 初項 1, 公比 $-\frac{1}{3}$ より $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$$

(3) 初項 6, 公比 $\frac{2}{3}$ より $a_n = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$$

(4) 初項 6, 公比 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ より $a_n = 6 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} = 0$$

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 2^{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 4^n)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1 \right\} = -\infty$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (0.2)^n}{(0.5)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{0.5}\right)^n - \left(\frac{0.2}{0.5}\right)^n \right\}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2^n - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right\} = \infty$$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} - 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times 0 - 3}{0 + 1} = -3$$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - (\sqrt{2})^n}{(\sqrt{3})^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^n \right\}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (\sqrt{3})^n - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^n \right\} = \infty$$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1 - 2^n}{1 + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$

よって, 振動する

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{(-2)^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^n}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

よって, 振動する

(1) 与えられた数列が収束するための必要十分条件は $-1 < 1 - 3x \leq 1$ である。

$$-2 < -3x \leq 0$$

$$\frac{2}{3} > x \geq 0 \quad \therefore 0 \leq x < \frac{2}{3}$$

(2) 与えられた数列が収束するための必要十分条件は $-1 < x^2 - 4x \leq 1$ である。

$$-1 < x^2 - 4x \quad \text{から} \quad x^2 - 4x + 1 > 0 \text{ を解いて}$$

$$x < 2 - \sqrt{3}, \quad 2 + \sqrt{3} < x \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x^2 - 4x \leq 1 \quad \text{から} \quad x^2 - 4x - 1 \leq 0 \text{ を解いて}$$

$$2 - \sqrt{5} \leq x \leq 2 + \sqrt{5} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{の共通範囲を求めて} \quad 2 - \sqrt{5} \leq x < 2 - \sqrt{3}, \quad 2 + \sqrt{3} < x \leq 2 + \sqrt{5}$$

$$(1) \quad |r| < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$$

$$\text{だから } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{2+r^n} = \frac{0}{2+0} = 0$$

$$(2) \quad r = 1 \text{ のとき}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{2+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$(3) \quad r = -1 \text{ のとき 数列は}$$

$$1, -\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}, \dots \text{となり振動する。}$$

$$(4) \quad |r| > 1 \text{ のとき } 0 < \left| \frac{1}{r} \right| < 1 \text{ だから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{2+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{2 \cdot \left(\frac{1}{r} \right)^n + 1} = \frac{r}{2 \times 0 + 1} = r$$

B 問題

$$(1) \quad -1 \leq \cos n\theta \leq 1 \text{ だから } -\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cos n\theta \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{ここで, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos n\theta = 0$$

$$(2) \quad 0 \leq 1 + \sin n\theta \leq 2 \text{ だから } \frac{0}{n} \leq \frac{1 + \sin n\theta}{n} \leq \frac{2}{n}$$

$$\text{ここで, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin \theta}{n} = 0$$

$$(3) \quad 0 \leq \sin^2 n\theta \leq 1 \text{ だから } \frac{0}{n^2+1} \leq \frac{\sin^2 n\theta}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

$$\text{ここで, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{n^2+1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n\theta}{n^2+1} = 0$$

$$(1) \quad n < a_n < n+1 \quad \text{だから} \quad 2n < a_{2n} < 2n+1$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{n} \quad \text{より} \quad \frac{2n}{n+1} < \frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{2n+1}{n}$$

$$\text{ここで, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{n}} = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = 2$$

$$(2) \quad \log_2 n < a_n < \log_2 2n \quad \text{より} \quad \log_2 2n < a_{2n} < \log_2 4n$$

$$n \geq 2 \text{ のとき } \frac{1}{\log_2 2n} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{\log_2 n} \quad \text{だから}$$

$$\begin{aligned} \frac{\log_2 2n}{\log_2 2n} &< \frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{\log_2 4n}{\log_2 n} \\ 1 &< \frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{\log_2 4 + \log_2 n}{\log_2 n} \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 4 + \log_2 n}{\log_2 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\log_2 n} + 1 \right) = 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = 1$$

$$(1) \quad \log_2(n-1) - \log_2 2n = \log_2 \frac{n-1}{2n} = \log_2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \quad \text{より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})}{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} \\ &= \frac{\{(n+1) - (n-1)\}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})}{\{(n+2) - (n-2)\}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} = \frac{2(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})}{4(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} \end{aligned}$$

より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

45

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)}{n^3} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{6} \times 1 \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (\text{分子}) &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\
 &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{6} n(n+1)\{(2n+1)+3\} \\
 &= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)
 \end{aligned}$$

$$(\text{分母}) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \text{ より}$$

$$(\text{与式}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} n(n+1)(n+2)}{\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+2)}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = 1$$

46

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 5^{n+1} + 7^{n+1}}{3^n + 5^n + 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\left(\frac{3}{7}\right)^n + 5\left(\frac{5}{7}\right)^n + 7}{\left(\frac{3}{7}\right)^n + \left(\frac{5}{7}\right)^n + 1} = 7$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdots (2 \cdot n)}{(3 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) \cdots (3 \cdot n)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{3^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0
 \end{aligned}$$

(1) (i) $|r| < 1$ のとき $0 < r^2 < 1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (r^2)^n = 0 \quad \text{だから} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + r^n + r^{2n}}{2 - r^{2n}} = \frac{1 + 0 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

(ii) $|r| > 1$ のとき $\left| \frac{1}{r} \right| < 1, \quad 0 < \frac{1}{r^2} < 1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + r^n + r^{2n}}{2 - r^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{r^2}\right)^n + \left(\frac{1}{r}\right)^n + 1}{2\left(\frac{1}{r^2}\right)^n - 1} = \frac{0 + 0 + 1}{2 \times 0 - 1} = -1$$

(iii) $r = 1$ のとき $r^2 = 1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + r^n + r^{2n}}{2 - r^{2n}} = \frac{1 + 1 + 1}{2 - 1} = 3$$

(iv) $r = -1$ のとき $r^2 = 1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + r^n + r^{2n}}{2 - r^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (-1)^n + 1}{2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{2 + (-1)^n\} \quad \text{となり振動する。}$$

$$\text{したがって} \begin{cases} |r| < 1 \text{ のとき } \frac{1}{2} \\ |r| > 1 \text{ のとき } -1 \\ r = 1 \text{ のとき } 3 \\ r = -1 \text{ のとき 振動する} \end{cases}$$

(2) $0 \leq \theta < 2\pi$ より $-1 \leq \sin \theta \leq 1$

(i) $|\sin \theta| < 1$ のとき,

$$\text{すなわち } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{ のとき}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \sin^n \theta}{2 + \sin^n \theta} = \frac{2 - 0}{2 + 0} = 1$$

(ii) $\sin \theta = 1$ のとき, すなわち $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \sin^n \theta}{2 + \sin^n \theta} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

(iii) $\sin \theta = -1$ のとき, すなわち $\theta = \frac{3}{2}\pi$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \sin^n \theta}{2 + \sin^n \theta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - (-1)^n}{2 + (-1)^n} \quad \text{となり振動する。}$$

$$\text{したがって} \begin{cases} 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{ のとき } 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \frac{1}{3} \\ \theta = \frac{3}{2}\pi \text{ のとき 振動する} \end{cases}$$

(1)

$3a_{n+1} = a_n + 6$ より $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$ $a_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(a_n - 3)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - 3\}$ は、初項 $a_1 - 3 = -2$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列だから

$$a_n - 3 = (-2) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad a_n = -2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3 \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

(2) $3a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ より $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n)$ と変形できる。

ここで $a_{n+1} - a_n = b_n$ とおくと

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n \quad \text{となり} \quad b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1 \quad \text{だから}$$

$\{b_n\}$ は初項 1、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である。

$\therefore b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ また、 $\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列だから

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき } a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 1 + \frac{3}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} \quad (\text{これは } n=1 \text{ のときも成り立つ}) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

A 問題

49

$$(1) \quad \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) \text{ だから}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{よって } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{1}{4} \text{ (収束)}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{1}{\sqrt{3n-2} + \sqrt{3n+1}} &= \frac{\sqrt{3n-2} - \sqrt{3n+1}}{(\sqrt{3n-2} + \sqrt{3n+1})(\sqrt{3n-2} - \sqrt{3n+1})} \\ &= -\frac{1}{3} (\sqrt{3n-2} - \sqrt{3n+1}) \text{ だから} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= -\frac{1}{3} \left\{ (1 - \sqrt{4}) + (\sqrt{4} - \sqrt{7}) + (\sqrt{7} - \sqrt{10}) + \cdots + (\sqrt{3n-2} - \sqrt{3n+1}) \right\} \\ &= -\frac{1}{3} (1 - \sqrt{3n+1}) \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2} + \sqrt{3n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{3} (1 - \sqrt{3n+1}) \right\} = \infty \text{ (発散)}$$

50

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots \text{ は, 初項 } a=1, \text{ 公比 } r=-\frac{1}{3} \text{ で, } |r|<1 \text{ だから収束し}$$

$$\text{和は } \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4} \text{ に収束。}$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{9}{8} - \frac{27}{16} + \cdots \text{ は, 初項 } a=\frac{1}{2}, \text{ 公比 } r=-\frac{3}{2} \text{ で, } |r|>1 \text{ だから発散する。}$$

$$(3) \quad 1 + 0.2 + 0.04 + 0.008 + \cdots \text{ は, 初項 } a=1, \text{ 公比 } r=0.2 \text{ で, } |r|<1 \text{ だから収束し}$$

$$\text{和は } \frac{1}{1-0.2} = \frac{5}{4} \text{ に収束。}$$

$$(4) \quad (\sqrt{2}-1) + 1 + (\sqrt{2}+1) + \cdots \text{ は, 初項 } a=\sqrt{2}-1, \text{ 公比 } r=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1 \text{ で,}$$

$$|r|>1 \text{ だから発散する。}$$

- (1) $1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots$ は、初項 $1 (\neq 0)$ 、公比 $-2x$ だから、
収束するためには $-1 < -2x < 1$ であればよい。

$$\therefore -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

- (2) $x + x(x^2 - x + 1) + x(x^2 - x + 1)^2 + x(x^2 - x + 1)^3 + \dots$ は、初項 x 、公比 $x^2 - x + 1$ だから、
(i) $x = 0$ のとき $0 + 0 + 0 + \dots$ となり収束する。
(ii) $x \neq 0$ のとき 収束するためには $-1 < x^2 - x + 1 < 1$ であればよい。

$$\text{まず } -1 < x^2 - x + 1 \text{ より } x^2 - x + 2 > 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ となり、すべての } x \text{ について成り立つ } \dots \textcircled{1}$$

$$\text{次に } x^2 - x + 1 < 1 \text{ より } x(x-1) < 0 \therefore 0 < x < 1 \dots \textcircled{2} (x \neq 0 \text{ をみtas})$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } 0 < x < 1$$

$$\text{よって、(i) または (ii) より } 0 \leq x < 1$$

- (1) $0.\dot{7} = 0.7 + 0.07 + 0.007 + \dots$ となり

初項 0.7 、公比 $\frac{1}{10}$ の無限等比級数である。

$$\therefore \frac{0.7}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$$

- (2) $0.\dot{2}\dot{4} = 0.24 + 0.0024 + 0.000024 + \dots$ となり

初項 0.24 、公比 $\frac{1}{100}$ の無限等比級数である。

$$\therefore \frac{0.24}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$$

- (3) $0.1\dot{5}1\dot{3} = 0.1 + 0.0513 + 0.000513 + 0.000000513 + \dots$ となり

第2項からは、初項 0.0513 、公比 $\frac{1}{1000}$ の無限等比級数である。

$$\begin{aligned} \therefore 0.1 + \frac{0.0513}{1 - \frac{1}{1000}} &= \frac{1}{10} + \frac{513}{10000 - 10} = \frac{1}{10} + \frac{513}{9990} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{19}{370} = \frac{28}{185} \end{aligned}$$

(1) 第 n 項 a_n は $a_n = \frac{1}{(2n)^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ だから

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

よって、この無限級数は収束し、和は $\frac{1}{2}$ に収束

(2) 第 n 項 a_n は $a_n = \frac{1}{n^2 + 2n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$ だから

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

よって、この無限級数は収束し、和は $\frac{3}{4}$ に収束

(3) 第 n 項 a_n は $a_n = \log_{10} \frac{n+1}{n}$ だから

$$\begin{aligned} S_n &= \log_{10} \frac{2}{1} + \log_{10} \frac{3}{2} + \log_{10} \frac{4}{3} + \cdots + \log_{10} \frac{n+1}{n} \\ &= \log_{10} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} \right) = \log_{10} (n+1) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_{10} (n+1) = \infty$$

よって、この無限級数は発散する。

(別解) $a_n = \log_{10} \frac{n+1}{n} = \log_{10} (n+1) - \log_{10} n$

$$\begin{aligned} S_n &= (\log_{10} 2 - \log_{10} 1) + (\log_{10} 3 - \log_{10} 2) + \cdots + \{\log_{10} (n+1) - \log_{10} n\} \\ &= \log_{10} (n+1) \quad \text{として求めてもよい。} \end{aligned}$$

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^n \quad \text{より}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n$ は公比 $\frac{1}{3}$ $\left(\left| \frac{1}{3} \right| < 1 \right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^n$ は公比 $\frac{1}{5}$ $\left(\left| \frac{1}{5} \right| < 1 \right)$ の無限等比級数だから収束し,

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = -\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{1}{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^n = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{よって, } \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n - 1}{3^n} \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n \quad \text{より}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ は公比 $\frac{2}{3}$ $\left(\left| \frac{2}{3} \right| < 1 \right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n$ は公比 $\frac{1}{3}$ $\left(\left| \frac{1}{3} \right| < 1 \right)$ の無限等比級数だから収束し,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = -\frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - (-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^n - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\} \quad \text{より,}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ は公比 $\frac{2}{3}$, $\left(\left| \frac{2}{3} \right| < 1 \right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n$ は公比 $-\frac{1}{3}$, $\left(\left| -\frac{1}{3} \right| < 1 \right)$ の無限等比級数だから収束し,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n = \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{よって } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - (-1)^n}{3^n} = 2 - \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos n\pi &= \frac{1}{3} \cos \pi + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cos 2\pi + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cos 3\pi + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cos 4\pi + \cdots \\
 &= -\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 - \cdots
 \end{aligned}$$

これは、初項 $-\frac{1}{3}$ 、公比 $-\frac{1}{3}$ ($\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$) の無限等比級数だから収束する。

$$\therefore = \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sin \frac{n\pi}{2} &= \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 + \frac{1}{2^2} \times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times (-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 0 \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \times 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^6 \times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^7 \times (-1) + \cdots \\
 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} - \cdots
 \end{aligned}$$

これは、初項 $-\frac{1}{2}$ 、公比 $-\frac{1}{2^2}$ の無限等比級数だから収束する。

$$\text{よって、与式} = \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = -\frac{2}{5}$$

56 第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (i) \quad S_{2n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{n+1} \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1
 \end{aligned}$$

$$(ii) \quad S_{2n} = S_{2n} - \left(-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

よって、(i) (ii) より $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = 1$ だから

与式は 1 に収束する。

$$(2) \quad (i) \quad S_{2n} = \left(\frac{2}{3} - \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \right) + \left(\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} - \frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} \right) + \left(\frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} - \frac{\cancel{8}}{\cancel{9}} \right) + \cdots + \left(\frac{\cancel{2n}}{\cancel{2n+1}} - \frac{\cancel{2n+2}}{\cancel{2n+3}} \right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2n+2}{2n+3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{2n+2}{2n+3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{2 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{3}{n}} \right) = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

$$(ii) \quad S_{2n-1} = S_{2n} - \frac{2n+2}{2n+3} = \frac{2}{3}$$

よって、(i)(ii)より $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}$ だから

与式に発散する。

57

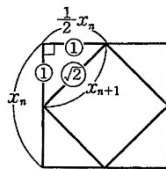
(1) 正方形 $S_1, S_2, S_3, \dots$ の1辺の長さをそれぞれ $x_1, x_2, x_3, \dots$ とする。

$x_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} x_n$ より正方形の相似比は $\frac{\sqrt{2}}{2}$ だから、

面積比は $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$ である。よって $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は、

初項 $S_1 = \frac{1}{2} a^2$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数である。

公比は $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$ より収束して、和は $\frac{\frac{1}{2} a^2}{1 - \frac{1}{2}} = a^2$



(2) S_n の周を l_n とすると、 $l_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} l_n$ 、 $l_1 = 2\sqrt{2}a$ であるから

$l_n = 2\sqrt{2}a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1}$ である。

これらの周の総和は初項 $2\sqrt{2}a$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の無限等比級数であり

公比は $\left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| < 1$ より収束して、 $\frac{2\sqrt{2}a}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{2}a}{2 - \sqrt{2}} = 4(\sqrt{2} + 1)a$

※ 卷末解答に誤植あり。

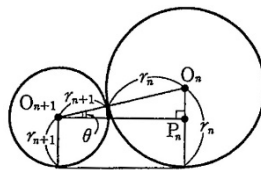
右図のように P_n をとると

$$\sin \theta = \frac{O_n P_n}{O_n O_{n+1}} = \frac{r_n - r_{n+1}}{r_n - r_{n+1}} \text{ より}$$

$$(r_n + r_{n+1}) \sin \theta = r_n - r_{n+1}$$

$$(1 + \sin \theta) r_{n+1} = (1 - \sin \theta) r_n$$

$$r_{n+1} = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} r_n$$



となり、円の相似比は $\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$ だから、面積比は $\left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right)^2$ である。

よって $\sum_{n=1}^{\infty} \pi r_n^2$ は、初項 πr_1^2 、公比 $\left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right)^2$ の無限等比級数である。

$0 < \sin \theta < 1$ より $0 < \left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right)^2 < 1$ だから収束し、

$$\text{和は } \frac{\pi r_1^2}{1 - \left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right)^2} = \frac{(1 + \sin \theta)^2 \pi r_1^2}{(1 + \sin \theta)^2 - (1 - \sin \theta)^2} = \frac{(1 + \sin \theta)^2 \pi r_1^2}{4 \sin \theta}$$

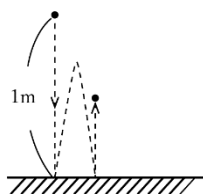
発展問題

n 回目にボールがはね返る高さを a_n とすると

$$a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n \text{ である。}$$

静止するまでの移動距離を d とすると

$$d = 1 + 2 \left\{ \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^3 + \cdots \right\}$$



であり、 $\{ \}$ の部分は初項 $\frac{3}{4}$ 、公比 $\frac{3}{4}$ $\left(\left| \frac{3}{4} \right| < 1 \right)$ の無限等比級数である。

$$\text{よって、} d = 1 + 2 \cdot \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 7 \text{ m}$$

1 章の問題

- 1 初項 10, 末項 20, 項数 $k+2$ の等差数列になるから

$$\frac{(k+2)(10+20)}{2} = 300$$

$$15(k+2) = 200 \quad \therefore k = 18$$

また, 第 20 項は 20 だから公差を d とすると

$$a_{20} = 10 + 19d = 20 \quad \therefore d = \frac{10}{19}$$

- 2 50 以下の 5 を分母とする数の和は

$$\frac{1}{5}(1+2+3+\cdots+250) = 6275$$

このうち既約分数でないものは

$$\frac{1}{5}(5+10+15+\cdots+250) = (1+2+3+\cdots+50) = 1275$$

よって, $6275 - 1275 = 5000$

3

1 から 100 までの自然数のうち n の倍数の和を $S(n)$ とすると

$$S(3) = 3 + 6 + 9 + \cdots + 99 = \frac{33(3+99)}{2} = 1683$$

$$S(5) = 5 + 10 + 15 + \cdots + 100 = \frac{20(5+100)}{2} = 1050$$

$$S(15) = 15 + 30 + 45 + \cdots + 90 = \frac{6(15+90)}{2} = 315$$

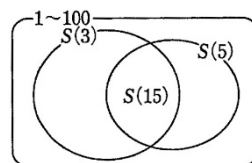
$$(1) \quad S(3) - S(15) = 1683 - 315 = 1368$$

- (2) 3 または 5 で割り切れる数の和は

$$S(3) + S(5) - S(15) = 1683 + 1050 - 315 = 2418$$

$$1 \text{ から } 100 \text{ までの総和は } \frac{100(1+100)}{2} = 5050$$

よって $5050 - 2418 = 2632$



$$4 \quad a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$(1) \quad a_n^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \text{だから}$$

$$\text{与式} = \sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1 \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

$$(2) \quad \frac{1}{a_n} = 2^{n-1} \quad \text{だから}$$

$$\text{与式} = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$(3) \quad \log_2 a_n = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -(n-1) \quad \text{だから}$$

$$\text{与式} = \sum_{k=1}^n \log_2 a_k = \sum_{k=1}^n (-k+1) = \frac{n(n+1)}{n} + n = -\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$5 \quad S_n = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$2^n - 1 > 10^6 \quad \text{より} \quad 2^n > 10^6 + 1 > 10^6 \quad \text{として}$$

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 2^n > \log_{10} 10^6$$

$$n \log_{10} 2 > 6$$

$$0.3010n > 6, \quad n > 19.93 \quad \therefore \quad n = 20$$

このとき

$$2^{20} = (2^{10})^2 = (1024)^2 > (10^3)^2 = 10^6 \quad \text{で成り立つ。}$$

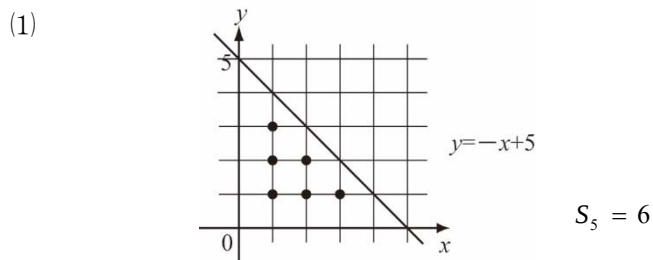
よって、最小の自然数 n は $n = 20$

6

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n) \\
 & a_{n+2} - (\alpha + \beta) a_{n+1} + \alpha \beta a_n = 0 \Leftrightarrow a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0 \quad \text{から} \\
 & \alpha + \beta = 1, \quad \alpha \beta = -2 \\
 & \alpha, \beta \text{ は } t^2 - t - 2 = 0 \text{ の解だから} \\
 & (t-2)(t+1) = 0 \quad \text{より } t = 2, -1 \quad \text{よって } (\alpha, \beta) = (2, -1), (-1, 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & (\alpha, \beta) = (2, -1) \text{ のとき } a_{n+2} - 2a_{n+1} = -(a_{n+1} - 2a_n) \\
 & \text{数列 } \{a_{n+1} - 2a_n\} \text{ は初項 } a_2 - 2a_1 = 1 - 2 \cdot 1 = -1, \\
 & \text{公比 } -1 \text{ の等比数列だから } a_{n+1} - 2a_n = -1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n \dots \textcircled{1} \\
 & (\alpha, \beta) = (-1, 2) \text{ のとき } a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n) \\
 & \text{数列 } \{a_{n+1} + a_n\} \text{ は初項 } a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2, \\
 & \text{公比 } 2 \text{ の等比数列だから } a_{n+1} + a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \dots \textcircled{2} \\
 & \textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ より } 3a_n = 2^n - (-1)^n \quad \text{よって } a_n = \frac{1}{3} \{2^n - (-1)^n\}
 \end{aligned}$$

7



$$(2) \quad \{S_n\} \text{ は } 0, 0, 1, 3, 6, 10, 21, \dots \text{であるので階差数列を } \{b_n\} \text{ とすると,}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 21 & \dots \dots \{S_n\} \\
 \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \\
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \dots \{b_n\}
 \end{array}$$

$$\{b_n\} \text{ は初項 } 0, \text{ 公差 } 1 \text{ の等差数列より } b_n = 0 + (n-1) \cdot 1 = n-1$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって, } S_n &= S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} (k-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\
 &= \frac{1}{2} (n-1)n - (n-1) = \frac{1}{2} (n-1)(n-2)
 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{a_n + 5}{3a_n - 2} \text{ とおくと } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$a_n \text{ について解くと } (3a_n - 2)b_n = a_n + 5 \\ (3b_n - 1)a_n = 2b_n + 5$$

$$b_n = \frac{1}{3} \text{ とすると } 0 \cdot a_n = 2 \times \frac{1}{3} + 5 \text{ となり不適。}$$

$$\text{ゆえに } b_n \neq \frac{1}{3} \text{ で } a_n = \frac{2b_n + 5}{3b_n - 1}$$

$$\text{ここで}\textcircled{1}\text{を用いて } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b_n + 5}{3b_n - 1} = \frac{2 \times 1 + 5}{3 \times 1 - 1} = \frac{7}{2}$$

9 2項定理を用いて

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$$

$x=1$ を代入して

$$2^n = 1 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$$

$$\therefore 2^n > {}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{逆数をとると}$$

$$\frac{1}{2^n} < \frac{2}{n(n-1)} \quad \text{両辺に } n \text{ を掛けて}$$

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1} \quad \text{が成り立つ。}$$

$$\text{ここで, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0 \quad \text{よって, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0 \quad \text{が成り立つ。}$$

10

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n} \quad \cdots \textcircled{1} \text{ とおくと}$$

$$\frac{1}{3} S_n = \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{3}{81} + \cdots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}} \quad \cdots \textcircled{2}$$

① - ②より

$$S_n - \frac{1}{3} S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2}{3} S_n = \frac{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$\therefore S_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} - \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n - \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{3^n}$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n - \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{3^n} \right\} = \frac{3}{4}$$

(1) 数学的帰納法で証明する。

$$a_n > \sqrt{3} \dots\dots \textcircled{1} \text{とする。}$$

(I) $n=1$ のとき

$$a_1 = 3 > \sqrt{3} \text{ で} \textcircled{1} \text{は成り立つ。}$$

(II) $n=k$ のとき

$$a_k > \sqrt{3} \text{ が成り立つと仮定すると}$$

$n=k+1$ のとき

$$a_{k+1} = \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{3}{a_k} \right)$$

$$a_k > 0, \frac{3}{a_k} > 0 \text{ だから, 相加平均と相乗平均の関係から}$$

$$a_k + \frac{3}{a_k} \geq 2\sqrt{a_k \cdot \frac{3}{a_k}} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore a_{k+1} = \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{3}{a_k} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

よって, $n=k+1$ のときにも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

(I), (II) によりすべての自然数で $\textcircled{1}$ は成り立つ。

$$\left(\begin{aligned} a_{k+1} - \sqrt{3} &= \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{3}{a_k} \right) - \sqrt{3} = \frac{a_k^2 - 2\sqrt{3}a_k + 3}{2a_k} \\ &= \frac{(a_k - \sqrt{3})^2}{2a_k} > 0 \text{ としてもよい。} \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad a_{n+1} - \sqrt{3} &= \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right) - \sqrt{3} = \frac{(a_n - \sqrt{3})^2}{2a_n} \\ &= \frac{a_n - \sqrt{3}}{a_n} \cdot \frac{a_n - \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } a_n > \sqrt{3} \text{ だから } 0 < \frac{a_n - \sqrt{3}}{a_n} < 1$$

$$\therefore a_{n+1} - \sqrt{3} < \frac{1}{2} (a_n - \sqrt{3}) \text{ が成り立つ。}$$

$$(3) \quad a_n - \sqrt{3} < \frac{1}{2}(a_{n-1} - \sqrt{3}), \quad a_{n-1} - \sqrt{3} < \frac{1}{2}(a_{n-2} - \sqrt{3}) \cdots$$

$$\cdots a_3 - \sqrt{3} < \frac{1}{2}(a_2 - \sqrt{3}), \quad a_2 - \sqrt{3} < \frac{1}{2}(a_1 - \sqrt{3}) \text{ の関係が成り立つから,}$$

順々に代入していくと

$$a_n - \sqrt{3} < \frac{1}{2}(a_{n-1} - \sqrt{3}) < \left(\frac{1}{2}\right)^2(a_{n-2} - \sqrt{3}) < \cdots < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - \sqrt{3})$$

$$\text{ここで, } a_n - \sqrt{3} > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - \sqrt{3}) = 0 \text{ だから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{3}) = 0 \quad \text{よって, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{3}$$

12

$$(1) \quad a_n = 5 \text{ となる最初の } n \text{ は}$$

$$\frac{4 \cdot (4+1)}{2} + 1 = 11$$

$$a_n = 5 \text{ となる最後の } n \text{ は } 11 + 5 - 1 = 15$$

$$\therefore 11 \leq n \leq 15$$

$$(2) \quad a_n = k \text{ となる最初の } n \text{ は}$$

$$\frac{(k-1) \cdot k}{2} + 1 = \frac{k^2 - k + 2}{2}$$

$$a_n = k \text{ となる最後の } n \text{ は } \frac{k^2 - k + 2}{2} + k - 1 = \frac{k^2 + k}{2}$$

$$\therefore \frac{k^2 - k + 2}{2} \leq n \leq \frac{k^2 + k}{2}$$

(3) (2)より $k = a_n$ として

$$\frac{a_n^2 - a_n + 2}{2} \leq n \leq \frac{a_n^2 + a_n}{2}$$

各辺の逆数をとると

$$\frac{2}{a_n^2 - a_n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{2}{a_n^2 + a_n}$$

各辺の平方根をとり、 a_n を掛けると

$$\frac{\sqrt{2}a_n}{\sqrt{a_n^2 - a_n}} \leq \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{2}a_n}{\sqrt{a_n^2 + a_n + 2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}a_n}{\sqrt{a_n^2 - a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{a_n}}} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}a_n}{\sqrt{a_n^2 + a_n + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{a_n} + \frac{2}{a_n^2}}} = \sqrt{2}$$

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$

13 P(x, y)とおくと

$$x = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots$$

これらはどちらも公比 $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ ($\left|\frac{1}{4}\right| < 1$) で、収束し、その和は

$$x = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

よって、点 P は $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ に近づく。