１章　数列　解答

１－１　数列とその和

A 問題

１

⑴　$a_1=7$，$a_2=2$，$a_3=-3$，$a_4=-8$，$a_5=-13$

⑵　$a_1=1$，$a_2=\dfrac{4}{3}$，$a_3=\dfrac{3}{2}$，$a_4=\dfrac{8}{5}$，$a_5=\dfrac{5}{3}$

⑶　$a_1=1$，$a_2=-2$，$a_3=4$，$a_4=-8$，$a_5=16$

２

⑴　偶数の数列だから　$a_n=2n$

⑵　分母は 3 の倍数で，分子は奇数だから　$a_n=\dfrac{2n-1}{3n}$

３

⑴　$a_n=2+(n-1)\cdot 6=6n-4$

$a_{10}=6\cdot 10-4=56$

⑵　$a_n=-3+(n-1)\cdot 2=2n-5$

$a_{10}=2\cdot 10-5=15$

⑶　初項が3, 公差が　$7-3=4$　だから

$a_n=3+(n-1)\cdot 4=4n-1$

$a_{10}=4\cdot 10-1=39$

⑷　初項が14, 公差が　$9-14=-5$　だから

$a_n=14+(n-1)\cdot(-5)=-5n+19$

$a_{10}=-5\cdot 10+19=-31$

４

初項を a，公差を d とすると

⑴　$a_5=a+4d=13$　$\cdots$①

$a_{10}=a+9d=28$　$\cdots$②

①，②を解いて　初項$=1$, 公差$=3$

$a_n=1+(n-1)\cdot 3=3n-2$

⑵　$a_6=a+5d=65$　$\cdots$①

$a_{30}=a+29d=-103$　$\cdots$②

①，②を解いて　初項$=100$, 公差$=-7$

$a_n=100+(n-1)\cdot(-7)=-7n+107$

5

(1) $\dfrac{40(2+60)}{2}=1240$

(2) $\dfrac{28(-1+23)}{2}=308$

(3) $\dfrac{26\{2\cdot 4+(26-1)\cdot 3\}}{2}=1079$

(4) $\dfrac{33\left\{2\cdot 6+(33-1)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}}{2}=-1188$

6

(1) $a_n=5+(n-1)\cdot 4=4n+1$,

$$S_n=\frac{n\{2\cdot 5+(n-1)\cdot 4\}}{2}=2n^2+3n$$

(2) $a_n=-1+(n-1)\cdot 10=10n-11$,

$$S_n=\frac{n\{2\cdot(-1)+(n-1)\cdot 10\}}{2}=5n^2-6n$$

(3) 初項が 3，公差が－2 だから

$$a_n=3+(n-1)\cdot(-2)=-2n+5$$

$$S_n=\frac{n\{2\cdot 3+(n-1)\cdot(-2)\}}{2}$$

$$=\frac{n(-2n+8)}{2}=-n(n-4)$$

(4) 初項が $\frac{1}{2}$，公差が $\frac{3}{4}$ だから

$$a_n=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}n-\frac{1}{4}$$

$$S_n=\frac{n\left\{2\cdot\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\frac{3}{4}\right\}}{2}$$

$$=\frac{n\left(1+\frac{3}{4}n-\frac{3}{4}\right)}{2}=\frac{n(3n+1)}{8}$$

7

(1) $a_n = 2 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 1$ だから

$3n - 1 = 296$ より $n = 99$

よって，第 99 項

その項までの和は

$$S_{99} = \frac{99}{2}\{2 \cdot 2 + (99-1) \cdot 3\} = \frac{99}{2} \cdot 298 = 14751$$

(2) $\dfrac{n(5-55)}{2} = -525$

$-50n = -1050$ より $n = 21$

よって，項数は21個

$a_{21} = 5 + 20d = -55$ $\quad \therefore \ d = -3$

よって，公差は -3

(3) $a_n = 1000 + (n-1) \cdot (-15) = -15n + 1015$

$-15n + 1015 < 0$ を解いて $n > 67.6 \cdots\cdots$

よって，初めて負になるのは第 68 項目から。

負になる前の項までの和を求めればよいから

$$\frac{67}{2}\{2 \cdot 1000 + (67-1) \cdot (-15)\} = \frac{67}{2}(2000 - 990) = 33835$$

よって，最大値は 33835

8 等差数列をなす 3 つの数を a，b，c とおく。

(1) $\begin{cases} a+b+c=15 & \cdots\cdots ① \\ abc=80 & \cdots\cdots ② \\ 2b=a+c & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

①，③より

$3b=15 \quad \therefore \ b=5$

$a+c=10$，②から $ac=16$

解と係数の関係から

a，c は $t^2-10t+16=0$ の解である。

$\therefore \ (t-2)(t-8)=0$ より $t=2$，8

よって，求める 3 つの数は 2，5，8

⑵ $\begin{cases} a+b+c=12 & \cdots\cdots ① \\ a^2+b^2+c^2=120 & \cdots\cdots ② \\ 2b=a+c & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

①，③より

$3b=12 \quad \therefore \quad b=4$

②に代入して

$a^2+c^2=104 \quad \cdots\cdots ④$

$a+c=8 \quad \cdots\cdots ⑤$

$a^2+(8-a)^2=104$

$2a^2-16a-40=0$

$a^2-8a-20=0$

$(a+2)(a-10)=0$

$\therefore \ a=-2，10$

$a=-2$ のとき　$c=10$

$a=10$ のとき　$c=-2$

よって，3 つの数は－2，4，10

$\boxed{\text{別解}}$

3 数を $a-d$，a，$a+d$　とおくと

⑴ $\begin{cases} (a-d)+a+(a+d)=15 & \cdots ① \\ (a-d)a(a+d)=80 & \cdots ② \end{cases}$

①，②を解いて　$a=5$，$d=\pm 3$

よって，3 つの数は 2，5，8

⑵ $\begin{cases} (a-d)+a+(a+d)=12 & \cdots ① \\ (a-d)^2+a^2+(a+d)^2=120 & \cdots ② \end{cases}$

①，②を解いて　$a=4$，$d=\pm 6$

よって，3 つの数は－2，4，10

9

⑴ $a_n=2\cdot 3^{n-1}$，$a_6=2\cdot 3^5=2\cdot 243=486$

⑵ $a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$，$a_6=3\cdot(-2)^5=3\cdot(-32)=-96$

⑶ 初項が 10，公比が　$20\div 10=2$　だから

$a_n=10\cdot 2^{n-1}$，$a_6=10\cdot 2^5=10\cdot 32=320$

⑷ 初項が 81，公比が　$(-27)\div 81=-\dfrac{1}{3}$　だから

$a_n=81\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$，$a_6=81\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^5=3^4\cdot\left(-\dfrac{1}{3^5}\right)=-\dfrac{1}{3}$

10

初項を a，公比を r とすると

⑴ $a_3 = ar^2 = 6 \quad \cdots①$

$a_6 = ar^5 = 48 \quad \cdots②$

②÷①より $\dfrac{ar^5}{ar^2} = \dfrac{48}{6} = 8 \quad \therefore\ r^3 = 8$ より $r = 2$

①に代入して，初項 $\dfrac{3}{2}$， 公比 2， $a_n = \dfrac{3}{2} \cdot 2^{n-1}$

⑵ $ar = -6 \qquad \cdots①$

$ar^5 = -486 \quad \cdots②$

②÷①より $\dfrac{ar^5}{ar} = \dfrac{-486}{-6} = 81 \quad \therefore\ r^4 = 81$

$(r-3)(r+3)(r^2+9) = 0 \quad \therefore\ r = 3,\ -3$ 　これを①に代入して

$$\begin{cases} \text{初項} -2,\ \text{公比}\ 3,\ a_n = -2 \cdot 3^{n-1} \\ \text{初項}\ 2,\ \text{公比} -3,\ a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1} \end{cases}$$

11

⑴ 初項 5，公比 2

⑵ 初項－3，公比－3

⑶ $a_n = 2^{2n-1} = 2 \cdot 2^{2n-2}$

$= 2 \cdot 4^{n-1}$ より

初項 2，公比 4

12

⑴ $a_n = 1 \cdot 4^{n-1} = 4^{n-1}$

$$S_n = \frac{1 \cdot (4^n - 1)}{4-1} = \frac{4^n - 1}{3}$$

⑵ $a_n = 8 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$S_n = \frac{8\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 16\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

⑶ $$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

⑷ $S_n = \dfrac{3\left\{1-\left(-2\right)^n\right\}}{1-\left(-2\right)}1-\left(-2\right)^n$

⑸ 初項が 2，公比が $\dfrac{4}{3} \div 2 = \dfrac{2}{3}$ だから

$a_n = 2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$S_n = \dfrac{2\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{2}{3}} = 6\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$

⑹ 初項が 1，公比が －1 だから

$a_n = 1 \cdot \left(-1\right)^{n-1} = \left(-1\right)^{n-1}$

$S_n = \dfrac{1 \cdot \left\{1-\left(-1\right)^n\right\}}{1-\left(-1\right)} = \dfrac{1-\left(-1\right)^n}{2} \quad \left(= \dfrac{1+\left(-1\right)^{n+1}}{2}\right)$

13

⑴ 一般項は $a_n = a \cdot 3^{n-1}$ とおける。

$a_4 = a \cdot 3^3 = 135,\quad 27a = 135 \quad \therefore$ 初項 5

$a_n = 5 \cdot 3^{n-1} > 2000$ より $3^{n-1} > 400$

$3^5 = 243,\quad 3^6 = 729$ だから 第 7 項

⑵ $S_n = \dfrac{3\left\{1-\left(-2\right)^n\right\}}{1-\left(-2\right)} = 1-\left(-2\right)^n = 129$

$\left(-2\right)^n = -128 = \left(-2\right)^7$ より 第 7 項

⑶ $a + ar + ar^2 = 3 \quad \cdots$①

$ar^3 + ar^4 + ar^5 = -24 \quad \cdots$②

②÷①より $\dfrac{ar^3\left(1+r+r^2\right)}{a\left(1+r+r^2\right)} = \dfrac{-24}{3} = -8$

$\therefore\ r^3 = -8$ より $r = -2$

①に代入して $a - 2a + 4a = 3$ より $a = 1$

よって，その次の 3 項の和は

$ar^6 + ar^7 + ar^8 = \left(-2\right)^6 + \left(-2\right)^7 + \left(-2\right)^8$

$= \left(-2\right)^6 \cdot \left\{1 - 2 + \left(-2\right)^2\right\} = 192$

14　等比数列をなす 3 つの数を a，b，c とおく。

⑴ $\begin{cases} a+b+c=26 & \cdots\cdots ① \\ abc=216 & \cdots\cdots ② \\ b^2=ac & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

②，③より

$b^3=216=6^3$　∴　$b=6$

①より　$a+c=20$

③より　$ac=36$

解と係数の関係から　a，c は

$t^2-20t+36=0$　の解である。∴　$(t-2)(t-18)=0$　より　$t=2,\ 18$

よって，求める 3 つの数は　2，6，18

⑵ $\begin{cases} a+b+c=39 & \cdots\cdots ① \\ abc=1000 & \cdots\cdots ② \\ b^2=ac & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

②，③より

$b^3=1000=10^3$　∴　$b=10$

①より　$a+c=29$

②より　$ac=100$

解と係数の関係から　a，c は

$t^2-29t+100=0$　の2つの解である。

∴　$(t-4)(t-25)=0$　より　$t=4$，25

よって，求める 3 つの数は　4，10，25

15

⑴ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+1)=3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=\frac{1}{2}n(3n+5)$

⑵ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k)=\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\times\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1-6)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n-5)$

⑶ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n(n+1)\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-1\right\}=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-2)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3\cdot\left(3^{n-1}-1\right)}{3-1} = \frac{3\left(3^{n-1}-1\right)}{2}$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} = \frac{1\cdot\left(3^{n}-1\right)}{3-1} = \frac{3^{n}-1}{2}$

B 問題

16

(1) $2\cdot 1 + 2\cdot 2 + \cdots\cdots + 2\cdot 50 = \dfrac{50\left(2+100\right)}{2} = 2550$

(2) $7\cdot 1 + 7\cdot 2 + \cdots\cdots + 7\cdot 14 = \dfrac{14\left(7+98\right)}{2} = 735$

(3) 2 かつ 7 の倍数は 14 の倍数だから　$14\cdot 1 + 14\cdot 2 + \cdots\cdots + 14\cdot 7 = \dfrac{7\left(14+98\right)}{2} = 392$

(4) (2の倍数)＋(7の倍数)－(14の倍数)　より　$2550 + 735 - 392 = 2893$

17

(1) 題意より $4n + 2 = 6m + 2$

$n = \dfrac{3}{2}m$ で，m,　n が自然数だから　$m = 2k$（k は自然数）と表せる。

求める数を a_k とすると　$a_k = 6\cdot 2k + 2 = 12k + 2$

条件より　$100 \leqq 12k + 2 \leqq 999$　　$\therefore\ 9 \leqq k \leqq 83$

よって，求める和は

初項 $a_9 = 110$,　末項 $a_{83} = 998$,　項数 75 の等差数列の和だから　$\dfrac{75\left(110+998\right)}{2} = 41550$

(2) 題意より $4n + 1 = 6m + 3$

$n = \dfrac{3m+1}{2}$ で，m,　n が自然数だから　$m = 2k - 1$（k は自然数）と表せる。

求める数を a_k とすると　$a_k = 6\cdot\left(2k-1\right) + 3 = 12k - 3$

条件より　$100 \leqq 12k - 3 \leqq 999$　　$\therefore\ 9 \leqq k \leqq 83$

よって，求める和は

初項 $a_9 = 105$,　末項 $a_{83} = 993$,　項数 75 の等差数列の和だから　$\dfrac{75\left(105+993\right)}{2} = 41175$

18

初項 a，公比を r とすると

$$\begin{cases} a+ar+ar^2+ar^3+ar^4=4 & \cdots① \\ a+ar+\cdots\cdots+ar^9=132 & \cdots② \end{cases}$$

②－①より　$ar^5+ar^6+ar^7+ar^8+ar^9=128$

$r^5\left(a+ar+ar^2+ar^3+ar^4\right)=128$

①を代入して　$r^5=32$　r は実数だから　$\therefore\ r=2$

$S_{15}=a+ar+\cdots\cdots+ar^{14}$

$=132+\left(ar^{10}+ar^{11}+ar^{12}+ar^{13}+ar^{14}\right)$

$=132+r^{10}\left(a+ar+ar^2+ar^3+ar^4\right)$

$=132+32^2\times 4=4228$

（別解）

$S_5=\dfrac{a\left(1-r^5\right)}{1-r}=4$　$\cdots①$

$S_{10}=\dfrac{a\left(1-r^{10}\right)}{1-r}=132$　$\cdots②$

②÷①より　$\dfrac{a\left(1-r^{10}\right)}{1-r}\times\dfrac{1-r}{a\left(1-r^5\right)}=\dfrac{132}{4}$

$\dfrac{\left(1-r^5\right)\left(1+r^5\right)}{1-r^5}=33$

$r^5=32$　より　$r=2$

①に代入して　$a=\dfrac{4}{31}$

$S_{15}=\dfrac{\frac{4}{31}\left(2^{15}-1\right)}{2-1}=\dfrac{4}{31}\times 32767=4228$

19

1，a，b，が等差数列をなすから　$2a=b+1$　$\cdots①$

1，a^2，b^2 が等比数列をなすから　$a^4=b^2$　$\cdots②$

②より　$b=\pm a^2$

$b=a^2$ のとき　①に代入して　$a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0$　$\therefore\ a=1,\ b=1$

$b=-a^2$ のとき　①に代入して　$a^2+2a-1=0$

$a=-1\pm\sqrt{2}$，$b=-3\pm 2\sqrt{2}$

$(a,\ b)=(1,\ 1)$，$\left(-1\pm\sqrt{2},\ -3\pm 2\sqrt{2}\right)$（複号同順）

20

$a_n=1+(n-1)d$，$b_n=a\cdot 2^{n-1}$　とおくと

(1)　$c_n=a_n+b_n=1+(n-1)d+a\cdot 2^{n-1}$

$c_2=1+d+a\cdot 2=11$　$\therefore\ 2a+d=10$ $\cdots①$

$c_4=1+3d+a\cdot 2^3=37$　$\therefore\ 8a+3d=36$ $\cdots②$

①，②を解いて　$a=3,\ d=4$　$\therefore\ c_n=1+(n-1)\cdot 4+3\cdot 2^{n-1}$

よって　$c_n=-3+4n+3\cdot 2^{n-1}$

(2)　$d_n=a_nb_n=\{1+(n-1)d\}a\cdot 2^{n-1}$

$d_2=a_2b_2=(1+d)\cdot 2a=40$　$\therefore\ a(1+d)=20$ $\cdots①$

$d_3=a_3b_3=(1+2d)\cdot 4a=140$　$\therefore\ a(1+2d)=35$ $\cdots②$

①，②を解いて　$a=5,\ d=3$

$\therefore\ d_n=\{1+(n-1)\cdot 3\}\cdot 5\cdot 2^{n-1}$

よって　$d_n=5(3n-2)\cdot 2^{n-1}$

21

⑴　第 n 項は　$a_n = n(2n+1) = 2n^2 + n$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k) = 2\sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k$$

$$= 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n+2+3)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$$

⑵　第 n 項は　$a_n = (2n)^2 = 4n^2$

$$\sum_{k=1}^{n}4k^2 = 4\sum_{k=1}^{n}k^2 = 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

⑶　第 n 項は　$a_n = (2n-1)(2n+1) = 4n^2 - 1$

$$\sum_{k=1}^{n}(4k^2-1) = 4\sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}1$$

$$= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - n$$

$$= \frac{n}{3}\{2(n+1)(2n+1) - 3\}$$

$$= \frac{n}{3}(4n^2 + 6n - 1)$$

⑷　一般項は　$a_n = n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$

$$\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k) = \sum_{k=1}^{n}k^3 + 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}k$$

$$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1) + (2n+1) + 2\right\}$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2 + 5n + 6)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

22

⑴ $a_k = \dfrac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3k-1} - \dfrac{1}{3k+2}\right)$ だから

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{n}{2(3n+2)}$$

⑵ $a_k = \dfrac{1}{2k(2k+2)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$ だから

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{4(n+1)}$$

⑶ $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}} = -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k+2}\right)$ だから

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k+2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{1} - \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{2} - \sqrt{4}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right) + \cdots\cdots + \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - \sqrt{2} - 1\right)$$

⑷ 第 k 項は

$a_k = \dfrac{1}{(k+1)^2 - 1} = \dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right)$ だから

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

23

⑴ 1, 3, 7, 13, 21, 31, …… $\{a_n\}$

2, 4, 6, 8, 10, …… $\{b_n\}$

$b_n = 2$　だから

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) = n^2 - n + 1$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，$a_n = n^2 - n + 1$

⑵ 1, 2, 5, 14, 41, 122, …… $\{a_n\}$

1, 3, 9, 27, 81, …… $\{b_n\}$

$b_n = 3^{n+1}$　だから

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} = 1 + \frac{1(3^{n-1} - 1)}{3-1} = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1)$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，$a_n = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1)$

⑶ $a_n = \frac{10^n - 1}{9}$

24

⑴ 第 k 項は

$$a_n = k\{n - (k-1)\}^2 = k\{n^2 - 2n(k-1) + (k-1)^2\}$$

$$= k\{k^2 - 2(n+1)k + (n+1)^2\}$$

$$= k^3 - 2(n+1)k^2 + (n+1)^2 k$$

よって

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 - 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - 2(n+1) \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)^2\{3n - 4(2n+1) + 6(n+1)\}$$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

⑵　第 k 項は

$$a_n=\left(n+k\right)^2=n^2+2nk+k^2$$

よって

$$S_n=n^2\sum_{k=1}^{n}1+2n\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=n^3+2n\cdot\frac{1}{2}n\left(n+1\right)+\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)$$
$$=\frac{1}{6}n\left\{6n^2+6n\left(n+1\right)+\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{6}n\left(14n^2+9n+1\right)$$
$$=\frac{1}{6}n\left(2n+1\right)\left(7n+1\right)$$

発展問題

25

$$\begin{array}{rrl} & S_n= & 1+3x+5x^2+\cdots\cdots+\left(2n-1\right)x^{n-1} \\ -\big) & xS_n= & \quad\; x+3x^2+\cdots\cdots+\left(2n-3\right)x^{n-1}+\left(2n-1\right)x^n \\ \hline & \left(1-x\right)S_n= & 1+2x+2x^2+\cdots\cdots+\quad 2x^{n-1}-\left(2n-1\right)x^n \end{array}$$

$x\neq1$ のとき

$$\left(1-x\right)S_n=1+\frac{2x\left(1-x^{n-1}\right)}{1-x}-\left(2n-1\right)x^n$$
$$=\frac{1-x+2x\left(1-x^{n-1}\right)-\left(2n-1\right)x^n\left(1-x\right)}{1-x}$$
$$=\frac{1+x-\left(2n+1\right)x^n+\left(2n-1\right)x^{n+1}}{1-x}$$

よって， $S_n=\dfrac{1+x-\left(2n+1\right)x^n+\left(2n-1\right)x^{n+1}}{\left(1-x\right)^2}$

$x=1$ のとき

$$S_n=1+3+5+\cdots+\left(2n-1\right)=n^2$$

26

⑴ 第 1 群から第 n 群までの項数は

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$（個）

第 1 群から第 9 群までの項数は

$$\frac{9(9+1)}{2}=45$$（個）

よって，10 群の最初の数は奇数の列 $a_N=2N-1$ の 46 番目だから

$a_{46}=2\cdot46-1=91$

⑵ $2N-1=999$ より $N=500$ だから

999 は 500 番目である。

500 番が第 n 群に入っているとすると

$$\frac{n(n-1)}{2}+1\leqq500\leqq\frac{n(n+1)}{2}$$

$n^2\fallingdotseq1000$ としておよその n を求めると $n=31$

$n=31$ のとき $\dfrac{31(31+1)}{3}=496$

$500-496=4$ だから第 32 群の 4 番目である。

⑶ 第 n 群の最初の数は

$$2\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)-1=n^2-n+1$$

第 n 群の最後の数は

$$2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-1=n^2+n-1$$

n 群には n 個の項があるから，第 n 群の和は

$$\frac{n\left\{\left(n^2-n+1\right)+\left(n^2+n-1\right)\right\}}{2}=n^3$$

１－２　漸化式と数学的帰納法

A 問題

27

⑴ $a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 4$

$a_3 = a_2 + 3 = 4 + 3 = 7$

$a_4 = a_3 + 3 = 7 + 3 = 10$

$a_5 = a_4 + 3 = 10 + 3 = 13$

⑵ $a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

$a_3 = 2a_2 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

$a_4 = 2a_3 - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

$a_5 = 2a_4 - 1 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$

⑶ $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$

$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4$

$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 8$

$a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 16$

28

⑴ $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2 \quad (n = 1 \text{ のときも成り立つ})$$

$\therefore \ a_n = 3n - 2$

⑵ $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) = n^2 - n + 1 \quad (n = 1 \text{ のときも成り立つ})$$

$\therefore \ a_n = n^2 - n + 1$

⑶ $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + \frac{2\left(2^{n-1} - 1\right)}{2 - 1} = 2^n - 1 \quad (n = 1 \text{ のときも成り立つ})$$

$\therefore \ a_n = 2^n - 1$

29

⑴　$2+5+8+\cdots\cdots+(3n-1)=\dfrac{n(3n+1)}{2}$　…①　とする。

（Ⅰ）　$n=1$のとき

$(\text{左辺})=2$，$(\text{右辺})=2$　よって，①は成り立つ。

（Ⅱ）　$n=k$　のとき①が成り立つと仮定すると

$$2+5+8+\cdots\cdots+(3k-1)=\frac{k(3k+1)}{2}\quad\cdots②$$

$n=k+1$のとき，①の左辺を，②を用いて変形すると

$$2+5+8+\cdots\cdots+(3k-1)+(3k+2)$$

$$=\frac{k(3k+1)}{2}+(3k+2)=\frac{3k^2+7k+4}{2}=\frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

よって，$n=k+1$のときも成り立つ。

（Ⅰ），（Ⅱ）より，①はすべての自然数nについて成り立つ。

⑵　$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}=2^n-1$　…①　とする。

（Ⅰ）　$n=1$のとき

$(\text{左辺})=1$，$(\text{右辺})=2^1-1=1$　よって，①は成り立つ。

（Ⅱ）　$n=k$のとき①が成り立つと仮定すると

$$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{k-1}=2^k-1\quad\cdots②$$

$n=k+1$のとき，①の左辺を，②を用いて変形すると

$$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{k-1}+2^k$$

$$=2^k-1+2k=2\cdot 2^k-1=2^{k+1}-1$$

よって，$n=k+1$　のときも成り立つ。

（Ⅰ），（Ⅱ）により，①はすべての自然数nについて成り立つ。

30

⑴　$2+4+6+\cdots\cdots+2n>n^2+1$ …① とする。

（Ⅰ） $n=2$ のとき $\left(\text{左辺}\right)=2+4=6,\ \left(\text{右辺}\right)=2^2+1=5$

よって，$\left(\text{左辺}\right)<\left(\text{右辺}\right)$ となり①は成り立つ。

（Ⅱ） $n=k\left(k\geqq 2\right)$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$2+4+6+\cdots\cdots+2k>k^2+1$ …②

$n=k+1$ のとき，①の左辺を，②を用いて変形すると

$2+4+6+\cdots\cdots+2k+2\left(k+1\right)>k^2+1+2\left(k+1\right)=\left(k+1\right)^2+1$

よって，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

（Ⅰ），（Ⅱ）より，①は $n\geqq 2$ の自然 n について成り立つ。

⑵　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}>\dfrac{2n}{n+1}$ …① とする。

（Ⅰ） $n=2$ のとき

$\left(\text{左辺}\right)=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，$\left(\text{右辺}\right)=\dfrac{2\cdot 2}{2+1}=\dfrac{4}{3}$

$\left(\text{左辺}\right)-\left(\text{右辺}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{6}>0$

よって, $\left(\text{左辺}\right)>\left(\text{右辺}\right)$ となり①は成り立つ。

（Ⅱ） $n=k\left(k\geqq 2\right)$ のとき①が成り立つと仮定すると

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k}>\dfrac{2k}{k+1}$ …②

$n=k+1$ のとき，①の左辺を，②を用いて変形すると

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}>\dfrac{2k}{k+1}+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{2k+1}{k+1}$

ここで $\dfrac{2k+1}{k+1}-\dfrac{2\left(k+1\right)}{k+2}=\dfrac{\left(2k+1\right)\left(k+2\right)-2\left(k+1\right)^2}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}$

$=\dfrac{k}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}>0$ より $\dfrac{2k+1}{k+1}>\dfrac{2\left(k+1\right)}{k+2}$

したがって $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}>\dfrac{2k+1}{k+1}>\dfrac{2\left(k+1\right)}{k+2}$

ゆえに $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}>\dfrac{2\left(k+1\right)}{k+2}$ が成り立つ。

よって，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

（Ⅰ），（Ⅱ）により，①は $n\geqq 2$ の自然数 n について成り立つ。

B 問題

31

⑴　$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1 + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

$$= \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n) + 1 = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 - 5n + 6)$$

これは $n = 1$ のときにも成り立つ。

よって，$a_n = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 - 5n + 6)$

⑵　$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

これは $n = 1$ のときにも成り立つ。

よって，$a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

32

⑴　$a_{n+1} + 4 = 2(a_n + 4)$ と変形。

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = 2\alpha + 4 \\ \alpha = -4 \end{array}}$$

数列 $\{a_n + 4\}$ は初項 $a_1 + 4 = 5$，公比 2

の等比数列である。

よって，$a_n - 1 = 5 \cdot 2^{n-1}$　すなわち　$a_n = 5 \cdot 2^{n-1} + 1$

⑵　$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$ と変形。

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1 \\ \alpha = 2 \end{array}}$$

数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = 1$，公比 $\frac{1}{2}$

の等比数列である。

よって，$a_n - 2 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　すなわち　$a_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

⑶　$a_{n+1} - \frac{1}{4} = -3\left(a_n - \frac{1}{4}\right)$ と変形。

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha + 3\alpha = 1 \\ \alpha = \frac{1}{4} \end{array}}$$

数列 $\left\{a_n - \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $a_1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$，公比 -3

の等比数列である。

よって，$a_n - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4} \cdot (-3)^{n-1}$　すなわち　$a_n = \frac{1}{4}\left\{1 - 5 \cdot (-3)^{n-1}\right\}$

発展問題

33

⑴　$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 1 + \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right\}$$

$$= 2 - \frac{1}{n}$$

これは $n = 1$ のときにも成り立つ。

よって，$a_n = 2 - \dfrac{1}{n}$

⑵　両辺の逆数をとると（$a_n > 0$）

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 3}{a_n} - \frac{3}{a_n} + 1$$

$\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと

$b_{n+1} = 3b_n + 1$，$b_1 = \dfrac{1}{2}$

$b_{n+1} + \dfrac{1}{2} = 3\left(b_n + \dfrac{1}{2} \right)$と変形。

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = 3\alpha + 1 \\ \alpha = -\dfrac{1}{2} \end{array}}$$

数列$\left\{ b_n + \dfrac{1}{2} \right\}$は初項$b_1 + \dfrac{1}{2} = 1$，公比 3

の等比数列

よって，$b_n + \dfrac{1}{2} = 1 \cdot 3^{n-1}$　すなわち　$b_n = 3^{n-1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2 \cdot 3^{n-1} - 1}{2}$

したがって，$a_n = \dfrac{2}{2 \cdot 3^{n-1} - 1}$

34　$a_1=2$，　$a_2=\dfrac{3a_1-2}{2a_1-1}=\dfrac{3\cdot 2-2}{2\cdot 2-1}=\dfrac{4}{3}$

$$a_3=\frac{3a_2-2}{2a_2-1}=\frac{3\cdot\frac{4}{3}-2}{2\cdot\frac{4}{3}-1}=\frac{6}{5}$$

$$a_4=\frac{3a_3-2}{2a_3-1}=\frac{3\cdot\frac{6}{5}-2}{2\cdot\frac{6}{5}-1}=\frac{8}{7}$$

よって，$a_1=\dfrac{2}{1}$ と考えて $a_n=\dfrac{2n}{2n-1}$ と推定される。

（Ⅰ）　$n=1$ のとき，$a_1-\dfrac{2}{1}=2$ で成り立つ。

（Ⅱ）　$n=k$ のとき，$a_k=\dfrac{2k}{2k-1}$……①が成り立つと仮定すると

$n=k+1$ のとき

$$a_{k+1}=\frac{2a_k-2}{2a_k-1}-\frac{2\cdot\frac{2k}{2k-1}-2}{2\cdot\frac{2k}{2k-1}-1}=\frac{2k+2}{2k+1}=\frac{2(k+1)}{2(k+1)-1}$$

となり成り立つ。

よって，（Ⅰ），（Ⅱ）より　①はすべての自然数 n について成り立つ。