

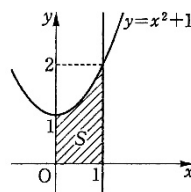
3章 積分法 解答

2節 積分法の応用

練習 1

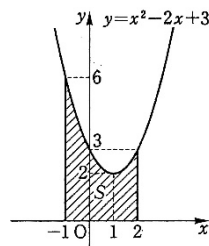
(1) 求める面積 S は

$$S = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$



(2) 求める面積 S は

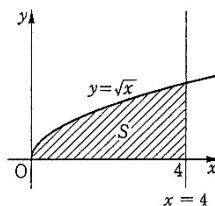
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 3) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right]_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} - 4 + 6 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 3 \right) = 9 \end{aligned}$$



練習 2

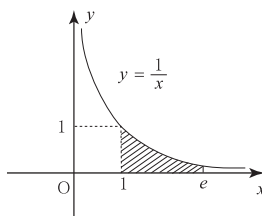
(1) 求める面積 S は

$$S = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{16}{3}$$



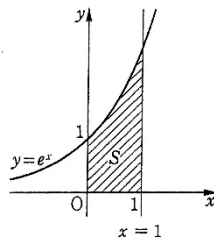
(2) 求める面積 S は

$$S = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\log x \right]_1^e = 1$$



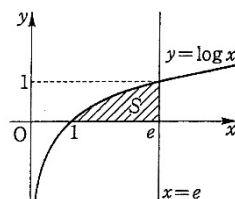
(3) 求める面積 S は

$$S = \int_0^1 e^x dx = \left[e^x \right]_0^1 = e - 1$$



(4) 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e x' \log x dx = \left[x \log x \right]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= e - \left[x \right]_1^e = e - (e - 1) = 1 \end{aligned}$$



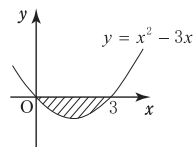
練習 3

- (1) 放物線と直線の交点の x 座標は

$$x^2 - 3x = 0 \quad \text{より} \quad x = 0, 3$$

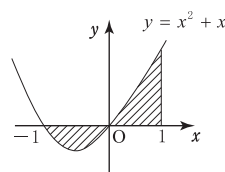
求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= -\int_0^3 (x^2 - 3x) dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 = -\left(9 - \frac{27}{2} \right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$



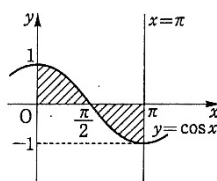
- (2) 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-1}^0 (x^2 + x) dx + \int_0^1 (x^2 + x) dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$



- (3) 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) - \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2 \end{aligned}$$



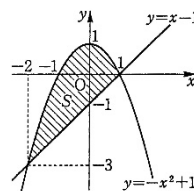
練習 4

- (1) 放物線と直線の交点の x 座標は

$$-x^2 + 1 = x - 1 \quad \text{より} \quad x = -2, 1$$

また、区間 $-2 \leq x \leq 1$ において $-x^2 + 1 \geq x - 1$ であるから、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{ (-x^2 + 1) - (x - 1) \} dx \\ &= \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

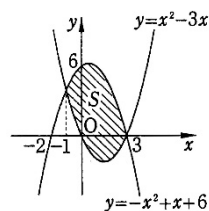


- (2) 2つの放物線の交点の x 座標は

$$x^2 - 3x = -x^2 + x + 6 \quad \text{より} \quad x = -1, 3$$

また、区間 $-1 \leq x \leq 3$ において $x^2 - 3x \leq -x^2 + x + 6$ であるから、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 \{ (-x^2 + x + 6) - (x^2 - 3x) \} dx \\ &= \int_{-1}^3 (-2x^2 + 4x + 6) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x \right]_{-1}^3 \\ &= (-18 + 18 + 18) - \left(\frac{2}{3} + 2 - 6 \right) = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

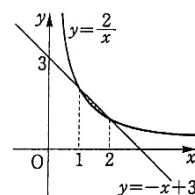


練習 5

(1) $\frac{2}{x} = -x + 3$ を解いて $x = 1, 2$

よって、求める面積 S は右の図より

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left(-x + 3 - \frac{2}{x} \right) dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \log x \right]_1^2 = (-2 + 6 - 2 \log 2) - \left(-\frac{1}{2} + 3 \right) \\ &= \frac{3}{2} - 2 \log 2 \end{aligned}$$

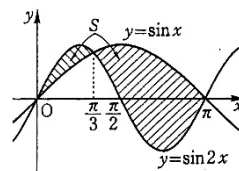


(2) $\sin x = \sin 2x$ を $0 \leq x \leq \pi$ で解くと

$$x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi$$

よって、求める面積 S は右の図より

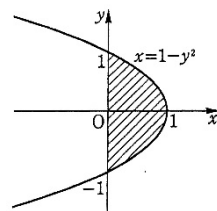
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$



練習 6

(1) 求める面積 S は右の図より

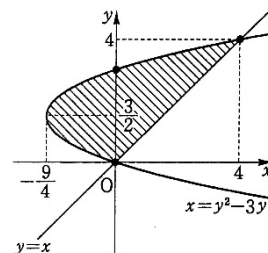
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (1 - y^2) dy = 2 \int_0^1 (1 - y^2) dy \\ &= 2 \left[y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



(2) $x = y^2 - 3y$, $y = x$ を連立して y について解くと $y = 0, 4$

よって、求める面積 S は右の図より

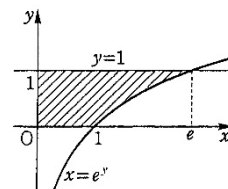
$$S = \int_0^4 \{ y - (y^2 - 3y) \} dy = \left[-\frac{y^3}{3} + 2y^2 \right]_0^4 = \frac{32}{3}$$



練習 7

$y = \log x$ を $x = e^y$ と考えると求める面積 S は

右の図より $S = \int_0^1 e^y dy = \left[e^y \right]_0^1 = e - 1$



練習 8

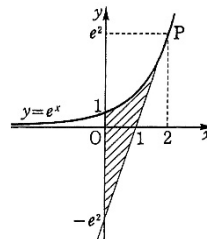
$y' = e^x$ より, 点 $P(2, e^2)$ における接線の方程式は

$$y - e^2 = e^2(x - 2)$$

$$\text{すなわち } y = e^2(x - 1)$$

よって, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{e^x - e^2(x - 1)\} dx = \left[e^x - e^2 \cdot \frac{(x - 1)^2}{2} \right]_0^2 \\ &= \left(e^2 - \frac{1}{2}e^2 \right) - \left(1 - \frac{1}{2}e^2 \right) = e^2 - 1 \end{aligned}$$



練習 9

$$y^2 = x(1 - x)^2 \quad (x \geq 0) \text{ から } y = \pm(1 - x)\sqrt{x}$$

よって, 求める面積 S は

$$S = 2 \int_0^1 (1 - x)\sqrt{x} dx = 2 \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{8}{15}$$

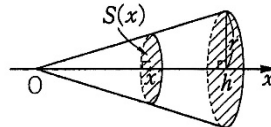
練習 10

右の図のように円錐をおいて考えると, x 軸上の点 x における断面積 $S(x)$ は

$$S(x): \pi r^2 = x^2 : h^2 \text{ から } S(x) = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2$$

よって, 求める体積 V は

$$V = \int_0^h S(x) dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



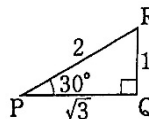
練習 11

例題 4 と同様に考えると

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot QR = \frac{1}{2} PQ \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} PQ \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} PQ^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} (a^2 - x^2) \end{aligned}$$

よって, 求める体積 V は

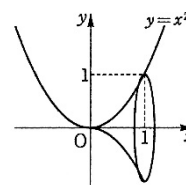
$$V = 2 \int_0^a \frac{1}{2\sqrt{3}} (a^2 - x^2) dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[a^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a = \frac{2\sqrt{3}}{9} a^3$$



練習 12

求める体積を V とすると

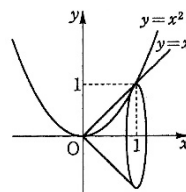
$$V = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \left[\frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$



練習 13

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ の交点の x 座標は $x^2 = x$ より $x = 0, 1$
 $0 \leq x \leq 1$ のとき $x^2 \leq x$ であるから、求める体積を V とすると

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 - \pi \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{2}{15} \pi$$



練習 14

$x = 2y$ より

$$V = \pi \int_0^2 (2y)^2 dy = \pi \left[\frac{4}{3} y^3 \right]_0^2 = \frac{32}{3} \pi$$

練習 15

$$(1) \quad \text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)^2 = \int_0^1 (1+x)^2 dx = \left[\frac{1}{3} (1+x)^3 \right]_0^1 = \frac{7}{3}$$

$$(2) \quad \text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1^4}{n^4} + \frac{2^4}{n^4} + \frac{3^4}{n^4} + \cdots + \frac{n^4}{n^4} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^4 = \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$(3) \quad \text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{3}{n}} + \cdots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \left[\log(1+x) \right]_0^1 = \log 2$$

練習 16

$$0 \leq x \leq 1 \text{ だから } 1 \leq x+1 \leq 2 \quad \therefore \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \quad (\text{等号は } x=1 \text{ のとき})$$

$$1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1) - x(x+1) - 2}{2(x+1)} = \frac{x(1-x)}{2(x+1)} \geq 0 \quad (\text{等号は } x=0, 1 \text{ のとき})$$

$$\text{よって, } 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 - \frac{x}{2} \text{ が成り立つ。}$$

これより

$$\int_0^1 \frac{1}{2} dx < \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx < \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2} \right) dx \\ \left[\frac{1}{2} x \right]_0^1 < \left[\log(x+1) \right]_0^1 < \left[x - \frac{1}{4} x^2 \right]_0^1$$

したがって, $\frac{1}{2} < \log 2 < \frac{3}{4}$ である。(終)

練習 17

k が 2 以上の自然数のとき

$$k \leq x \leq k+1 \quad \text{ならば} \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \quad \text{であり}$$

等号の成り立つのは $x = k+1$ のときだけだから

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ($n \geq 2$) として辺々加えると

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} < \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \dots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx$$

$$\text{ここで, 右辺} = \int_1^n \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^n = \log n$$

$$\text{よって, } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} < \log n \quad \text{が成り立つ。 (終)}$$

節末問題

1.

$$y = x^2 \text{ より } y' = 2x$$

点 $(-1, 1)$ における接線の方程式は

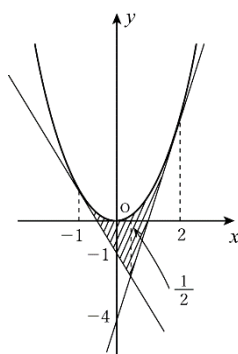
$$y = -2(x+1)+1 \quad \therefore \quad y = -2x-1$$

点 $(2, 4)$ における接線の方程式は

$$y = 4(x-2)+4 \quad \therefore \quad y = 4x-4$$

2 つの接線の交点の x 座標は

$$-2x-1 = 4x-4 \quad \text{より} \quad x = \frac{1}{2}$$



求める面積は右の図の斜線部分だから、面積を S とすると

$$S = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{x^2 - (-2x-1)\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \{x^2 - (4x-4)\} dx$$

$$= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x+1)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (x-2)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x-2)^3 \right]_{\frac{1}{2}}^2$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{8} = \frac{9}{4}$$

2.

$$y = x^3 - 4x \text{ より } y' = 3x^2 - 4$$

点 $(1, -3)$ における接線の方程式は

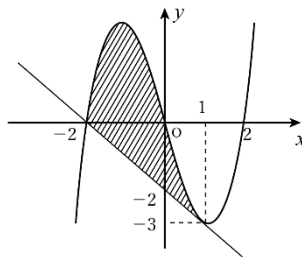
$$y = -(x-1) - 3 \quad \therefore y = -x - 2$$

曲線 $y = x^3 - 4x$ と接線 $y = -x - 2$ の共有点の x 座標は

$$x^3 - 4x = -x - 2 \text{ より}$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0, (x-1)^2(x+2) = 0$$

$$\therefore x = 1, -2$$



求める面積は右の図の斜線部分だから、面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{ (x^3 - 4x) - (-x - 2) \} dx \\ &= \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \right) - (4 - 6 - 4) \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

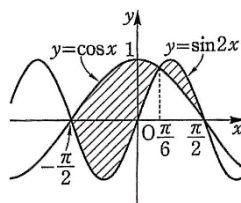
3.

(1) $y = \cos x$ と $y = \sin 2x$ の共有点の x 座標は、

$$\cos x = \sin 2x \text{ より } \cos x (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\text{よって } \cos x = 0 \text{ と } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ から } x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$$



したがって、求める面積 S は下の図より

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\pi/2}^{\pi/6} (\cos x - \sin 2x) dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\sin 2x - \cos x) dx \\ &= \left[\sin x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_{-\pi/2}^{\pi/6} + \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - \sin x \right]_{\pi/6}^{\pi/2} \\ &= \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

(2) $y = \frac{1}{x}$ と $y = \frac{1}{2}x$ の共有点の x 座標は

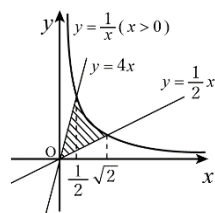
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x \text{ より } x^2 = 2, \quad x > 0 \text{ であるから } x = \sqrt{2}$$

$y = \frac{1}{x}$ と $y = 4x$ の共有点の x 座標は

$$\frac{1}{x} = 4x \text{ より } x^2 = \frac{1}{4}, \quad x > 0 \text{ であるから } x = \frac{1}{2}$$

よって、求める面積 S は図より

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(4x - \frac{1}{2}x \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x \right) dx \\ &= \left[\frac{7}{4}x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[\log x - \frac{1}{4}x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{7}{16} + \left(\log \sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\log \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \right) = \frac{3}{2} \log 2 \end{aligned}$$

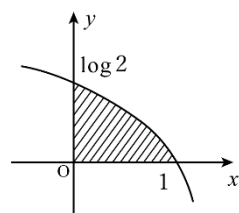


(3) $y = \log(2-x)$ から $2-x = e^y$

ゆえに $x = 2 - e^y$

よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(2-x) dx &= \int_0^1 (x-2)' \log(2-x) dx \\ &= \left[(x-2) \log(2-x) \right]_0^1 - \int_0^1 (x-2) \cdot \frac{-1}{2-x} dx \\ &= 2 \log 2 - \left[x \right]_0^1 = 2 \log 2 - 1 \end{aligned}$$



4.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \text{ より } \sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$$

$$\text{ゆえに } (1 - \sqrt{x})^2 = 1 - 2\sqrt{x} + x$$

求める面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y dx = \int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x) dx \\ &= \left[x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

5. 2 曲線

$x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$, $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ の第 1 象限内の共有点を P とすると

$$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である。点 P から x 軸に垂線 PH を引き、

点 $(1, 0)$ を Q とすると、 $\triangle OPH$ の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8}$$

また、図形 PHQ の面積 S_2 は

$$S_2 = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \sqrt{3(1-x^2)} dx = \sqrt{3} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

ここで、 $x = \sin \theta$ とおくと $\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$

よって

$$\begin{aligned} S_2 &= \sqrt{3} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned}$$

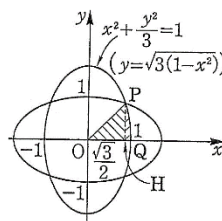
x	$\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{2}$

したがって

$$S_1 + S_2 = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{12} \pi$$

ゆえに、求める共通部分の面積 S は

$$S = 8 \times (S_1 + S_2) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$$



6.

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k}{2n} \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n} \\ &= \int_0^1 \cos \frac{\pi}{2} x dx = \left[\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x \right]_0^1 = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k}{n^2 + k^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2nk}{n^2 + k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2 \frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2} \\ &= \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx = \left[\log(1+x^2) \right]_0^1 \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

7.

k が自然数のとき

$k \leq x \leq k+1$ ならば $\sqrt{k} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{k+1}$ だから

$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ である。

等号が成り立つのは $x=k$ のときだけだから

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dx$$

すなわち

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ として、辺々加えると

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{k}} dx + \dots + \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

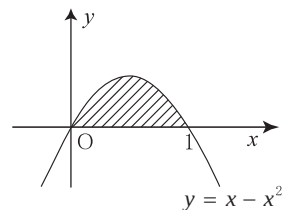
ここで

$$\text{左辺} = \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_1^{n+1} = 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

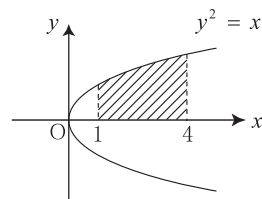
よって、 $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$ が成り立つ。 (終)

8.

$$\begin{aligned} (1) \quad V &= \pi \int_0^1 (x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{\pi}{30} \end{aligned}$$

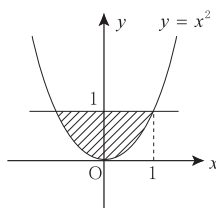


$$(2) \quad V = \pi \int_1^4 x dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^4 = \pi \left(8 - \frac{1}{2} \right) = \frac{15}{2} \pi$$

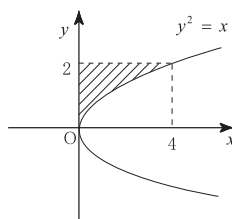


9.

$$(1) \quad V = \pi \int_0^1 y dy = \pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$



$$(2) \quad V = \pi \int_0^2 (y^2)^2 dy = \pi \left[\frac{1}{5} y^5 \right]_0^2 = \frac{32}{5} \pi$$



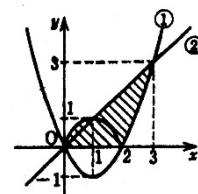
10. $y = x^2 - 2x$ ①

$y = x$ ②

①の x 軸の下部分を x 軸に関して対称移動すると、

①、②で囲まれた部分は、右の図の斜線部分になる。

x 軸のまわりに回転させればよいから

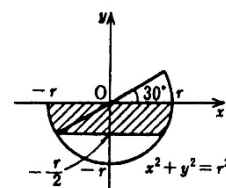


$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (-x^2 + 2x)^2 dx + \pi \int_1^3 x^2 dx - \pi \int_2^3 (x^2 - 2x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx + \pi \int_1^3 x^2 dx - \pi \int_2^3 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{5} x^5 - x^3 + \frac{4}{3} x^2 \right]_0^1 + \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^3 - \pi \left[\frac{1}{5} x^5 - x^3 + \frac{4}{3} x^2 \right]_2^3 \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3} \right) + \pi \left(9 - \frac{1}{3} \right) - \pi \cdot 3^3 \left(\frac{9}{5} - 3 + \frac{4}{3} \right) + \pi \cdot 2^3 \left(\frac{4}{5} - 2 + \frac{4}{3} \right) \\ &= \pi \left(\frac{46}{5} - 27 \times \frac{2}{15} + 8 \times \frac{2}{15} \right) = \frac{100}{15} \pi = \frac{20}{3} \pi \end{aligned}$$

11.

流出した水の量は右の図の斜線部分を y 軸のまわりに回転した体積に等しいから

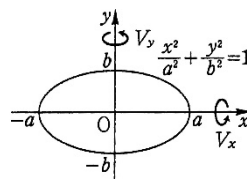
$$\int_{-\frac{r}{2}}^0 \pi x^2 dy = \pi \int_{-\frac{r}{2}}^0 (r^2 - y^2) dy = \left[r^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{-\frac{r}{2}}^0 = \frac{11}{24} \pi r^3$$



12.

対称性を利用して

$$\begin{aligned} V_x &= 2\pi \int_0^a y^2 dx = 2\pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx \\ &= \frac{2\pi b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^a = \frac{4}{3} \pi a b^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^b x^2 dy = 2\pi \int_0^b \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2) dy \\ &= \frac{2\pi a^2}{b^2} \left[b^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^b = \frac{4}{3} \pi a^2 b \end{aligned}$$

よって $V_x : V_y = \frac{4}{3} \pi a b^2 : \frac{4}{3} \pi a^2 b = b : a$

13.

$$y = \sqrt{x} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$y = mx \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \text{とすると}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の交点は } (0, 0) \text{ および } \left(\frac{1}{m^2}, \frac{1}{m} \right)$$

x 軸のまわりに回転した体積は,

$$\pi \int_0^{\frac{1}{m^2}} \left\{ (\sqrt{x})^2 - (mx)^2 \right\} dx = \frac{\pi}{6m^4}$$

y 軸のまわりに回転した体積は

$$\pi \int_0^{\frac{1}{m}} \left\{ \left(\frac{y}{m} \right)^2 - (y^2)^2 \right\} dy = \pi \left[\frac{y^3}{3m^2} - \frac{1}{5} y^5 \right]_0^{\frac{1}{m}} = \frac{2\pi}{15m^5}$$

$$\frac{\pi}{6m^4} = \frac{2\pi}{15m^5} \quad \text{よ} \quad m = \frac{4}{5}$$

