

2章 微分法 解答

3節 導関数の応用

練習 1

(1) $y' = 2x$ より $x = 2$ を代入して傾きは 4

$$\therefore y - 4 = 4(x - 2)$$

$$\text{よって, } y = 4x - 4$$

(2) $y' = -3x^2$ より $x = -1$ を代入して傾きは -3

$$\therefore y - 1 = -3(x + 1)$$

$$\text{よって, } y = -3x - 2$$

(3) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ より $x = 1$ を代入して傾きは $\frac{1}{2}$

$$\therefore y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$\text{よって, } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

(4) $y' = -\frac{1}{x^2}$ より $x = 2$ を代入して傾きは $-\frac{1}{4}$

$$\therefore y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

$$\text{よって, } y = -\frac{1}{4}x + 1$$

(5) $y' = e^x$ より $x = 0$ を代入して傾きは 1

$$\therefore y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$$

$$\text{よって, } y = x + 1$$

(6) $y' = \frac{1}{x}$ より $x = 1$ を代入して傾きは 1

$$\therefore y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$$

$$\text{よって, } y = x - 1$$

練習 2

(1) $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ だから

$$\frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)} = f'(c), \quad -3 < c < 3 \text{ より}$$

$$\frac{27 + 27}{6} = 3c^2$$

$$c^2 = 3 \quad \therefore c = \pm\sqrt{3} \quad (-3 < c < 3 \text{ を満たす。})$$

(2) $f(x) = \log x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ だから

$$\frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = f'(c), \quad 1 < c < e \text{ より}$$

$$\frac{\log e - \log 1}{e - 1} = \frac{1}{c}$$

$$\therefore c = e - 1 \quad (1 < c < e \text{ を満たす。})$$

練習 3

$f(x) = e^x$ は $(-\infty, \infty)$ で微分可能で連続であり, $f'(x) = e^x$ である。

区間 $[a, b]$ において, 平均値の定理から

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^c, \quad a < c < b \quad \text{となる } c \text{ が存在する。}$$

$$a < c < b \quad \text{より} \quad e^a < e^c < e^b$$

$$\text{よって, } e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$$

練習 4

$$(1) \quad f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1) \quad \text{だから}$$

$$x = -3, 1 \text{ で } f'(x) = 0 \quad \text{であり}$$

$$x < -3, 1 < x \quad \text{のとき} \quad f'(x) > 0$$

$$-3 < x < 1 \quad \text{のとき} \quad f'(x) < 0$$

よって, 関数 $f(x)$ は

$x < -3, 1 < x$ で増加

$-3 < x < 1$ で減少

$$(2) \quad f'(x) = -3x^2 - 6x = -3x(x+2) \quad \text{だから}$$

$$x = 0, -2 \text{ で } f'(x) = 0 \quad \text{であり}$$

$$-2 < x < 0 \quad \text{のとき} \quad f'(x) > 0$$

$$x < -2, 0 < x \quad \text{のとき} \quad f'(x) < 0$$

よって, 関数 $f(x)$ は

$-2 < x < 0$ で増加

$x < -2, 0 < x$ で減少

$$(3) \quad f(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

$$= 3(x-1)^2 + 2 > 0$$

よって, 関数 $f(x)$ はすべての区間で増加する。

($f(x)$ は常に増加するでもよい。)

(4) $f'(x) = 4x^2 - 6x^3 - 4x = 2x(2x^2 - 3x - 2) = 2x(x-2)(2x+1)$ だから

$x = 0, 2, -\frac{1}{2}$ で $f'(x) = 0$ であり

$-\frac{1}{2} < x < 0, 2 < x$ のとき $f'(x) > 0$

$x < -\frac{1}{2}, 0 < x < 2$ のとき $f'(x) < 0$

よって、関数 $f(x)$ は

$-\frac{1}{2} < x < 0, 2 < x$ で増加

$x < -\frac{1}{2}, 0 < x < 2$ で減少

練習 5

(1) $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$ であるから

$x = -2, 0$ で、 $f'(x) = 0$ となり増減表は次のようになる。

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	-1	↘	-5	↗

よって $x = -2$ のとき極大となり 極大値は-1

$x = 0$ のとき極小となり 極小値は-5

(2) $f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x-1)(x+1)$ であるから

$x = 0, 1, -1$ で、 $f'(x) = 0$ となり増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	0	↘	-1	↗	0	↘

よって $x = -1, 1$ のとき極大となり 極大値は0

$x = 0$ のとき極小となり 極小値は-1

練習 6

(1) $f'(x) = (1+x)e^x$

x	...	-1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

$x = -1$ のとき, 極小値 $-\frac{1}{e}$

(2) $f'(x) = \log x + 1$

$x > 0$ だから

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$	/	-	0	+
$f(x)$	/	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

$x = \frac{1}{e}$ のとき, 極小値 $-\frac{1}{e}$

練習 7

(1) $f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$

よって, $f(x)$ は極値をもたない。

(2) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$

よって, $f(x)$ は極値をもたない。

(3) $f'(x) = \cos x - 1, -1 \leq \cos x \leq 1$ より

$f'(x) \leq 0$ であるから, $f(x)$ は極値をもたない。

練習 8

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad (-1 \leq x \leq 4)$

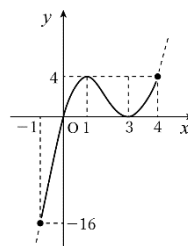
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

したがって区間 $-1 \leq x \leq 4$ における増減表は次のようになる。

x	-1	...	1	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-16	↗	4	↘	0	↗	4

よって, $x=1, 4$ のとき最大値 4

$x=-1$ のとき最小値 -16



(2) $f(x) = -x^3 + 3x + 2 \quad (-2 \leq x \leq 2)$

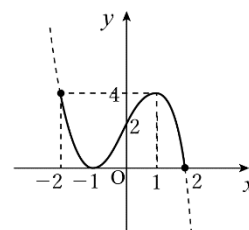
$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$

したがって区間 $-2 \leq x \leq 2$ における増減表は次のようになる。

x	-2	...	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	+	
$f(x)$	4	↘	0	↗	4	↘	0

よって、 $x = -2, 1$ のとき最大値 4

$x = -1, 2$ のとき最小値 0



(3) $f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (0 \leq x \leq 3)$

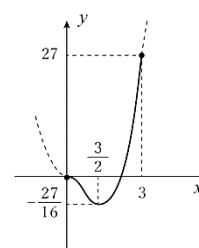
$f'(x) = 4x^3 - 6x = 2x^2(2x-3)$

したがって区間 $0 \leq x \leq 3$ における増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{3}{2}$	...	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{27}{16}$	↗	27

よって、 $x = 3$ のとき最大値 27

$x = \frac{3}{2}$ のとき最小値 $-\frac{27}{16}$



(4) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1 \quad (-2 \leq x \leq 2)$

$f'(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$

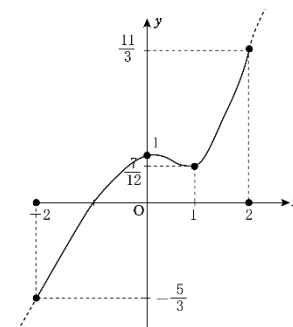
$f'(x) = 0$ とすると $x = 0, 1, -2$

したがって区間 $-2 \leq x \leq 2$ における増減表は次のようになる。

x	-2	...	0	...	1	...	2
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\frac{5}{3}$	↗	1	↘	$\frac{7}{12}$	↗	$\frac{11}{3}$

よって、 $x = 2$ のとき 最大値 $\frac{11}{3}$

$x = -2$ のとき 最小値 $-\frac{5}{3}$



練習 9

$$(1) \quad f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$$

定義域は $1-x^2 \geq 0$ から $-1 \leq x \leq 1$

$$f'(x) = 1 - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} + x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ となるのは } \sqrt{1-x^2} = -x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①の両辺を2乗して $1-x^2 = x^2$

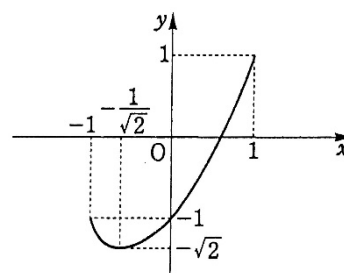
$$x^2 = \frac{1}{2} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \textcircled{1} \text{ を満たす } x \text{ は } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって、区間 $-1 \leq x \leq 1$ における増減表は次のようになる。

x	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
$f'(x)$	/	-	0	+	/
$f(x)$	-1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	1

よって、 $x=1$ のとき、最大値 1

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき、最小値 } -\sqrt{2}$$



$$(2) \quad f(x) = x \log x - x \left(\frac{1}{e} \leq x \leq e \right)$$

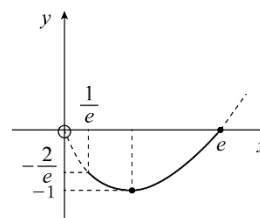
$$f'(x) = \log x$$

したがって区間 $\frac{1}{e} \leq x \leq e$ における増減表は次のようになる。

x	$\frac{1}{e}$	...	1	...	e
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-\frac{2}{e}$	↘	-1	↗	0

よって、 $x=e$ のとき 最大値 0

$x=1$ のとき 最小値 -1



(3)

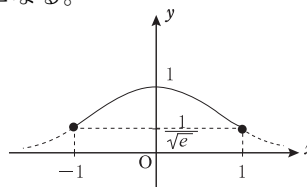
$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$y' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 0$$

したがって区間 $-1 \leq x \leq 1$ における増減表は次のようになる。

x	-1	...	0	...	1
y'		+	0	-	
y	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$



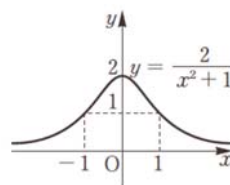
よって、 $x = 0$ のとき 最大値 1 $x = \pm 1$ のとき 最小値 $\frac{1}{\sqrt{e}}$

練習 10

$$(1) \quad y = \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$y' = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

x	...	0	...
y'	+	0	-
y	$\nearrow$	2	$\searrow$



$x = 0$ のとき、極大値 2

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x^2 + 1} = 0 \text{ から } x \text{ 軸が漸近線となる。}$$

よって、グラフは右の図のようになる。

$$(2) \quad y = \frac{3-4x}{x^2 + 1}$$

$$y' = \frac{-4(x^2 + 1) - 2x(3 - 4x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(2x + 1)(x - 2)}{(x^2 + 1)^2}$$

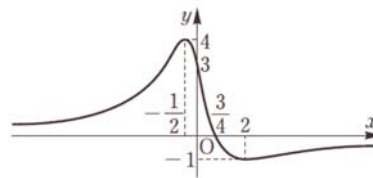
x	...	$-\frac{1}{2}$	...	2	...
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$x = -\frac{1}{2}$ のとき 極大値 4

$x = 2$ のとき 極小値 -1

$$\text{また、} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3-4x}{x^2 + 1} = 0 \text{ であるから、} x \text{ 軸が漸近線である。}$$

よって、グラフは右の図のようになる。



練習 11

(1) $y = x + \frac{1}{x+1}$

定義域は $x \neq -1$

$$y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$x = -2$ のとき 極大値 -3

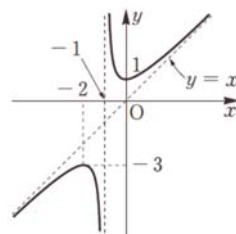
$x = 0$ のとき 極小値 1

また $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y-x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ より 直線 $y=x$ が漸近線,

$\lim_{x \rightarrow -1+0} y = \infty, \lim_{x \rightarrow -1-0} y = -\infty$ より $x = -1$ が漸近線である。

よって、グラフは右の図のようになる。

x	$\dots$	-2	$\dots$	-1	$\dots$	0	$\dots$
y'	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	-3	$\searrow$	/	$\searrow$	1	$\nearrow$



(2) $y = \frac{x^2 - x - 2}{x}$

定義域は $x \neq 0$

$$y = x - 1 - \frac{2}{x} \quad y' = 1 + \frac{2}{x^2} \quad \text{極値はない。}$$

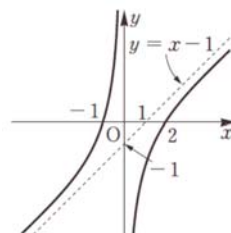
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left\{ y - (x-1) \right\} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{2}{x} \right) = 0$$

より、直線 $y = x - 1$ が漸近線

$\lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow -0} y = \infty$ より、 y 軸が漸近線である。

よって、グラフは右の図のようになる。

x	$\dots$	0	$\dots$
y'	$+$	/	$+$
y	$\nearrow$	/	$\nearrow$



練習 12

(1) $y = x^4 - 2x^3$

$$y' = 4x^3 - 6x^2$$

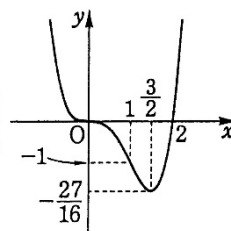
$$y'' = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$$

より、曲線の凹凸は右の表のようになる。

よって、変曲点は 点 $(0, 0), (1, -1)$

である。

x	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	下に凸	0	上に凸	-1	下に凸



(2) $y = xe^x$

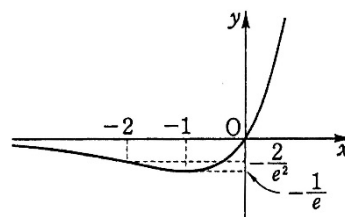
$$y' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x$$

$$y'' = 1 \cdot e^x + (1+x) \cdot e^x = (2+x)e^x$$

より、曲線の凹凸は右の表のようになる。

よって、変曲点は 点 $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$

x	$x < -2$	-2	$-2 < x$
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	$-\frac{2}{e^2}$	下に凸



(3) $y = \tan x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$

$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$ より, 曲線の凹凸は下の表のようになる。

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < x < 0$	0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
y''		-	0	+	
y		上に凸	0	下に凸	

よって, 変曲点は 点 $(0, 0)$ である。

練習 13

(1) $y = x^4 - 2x^3$

$y' = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$

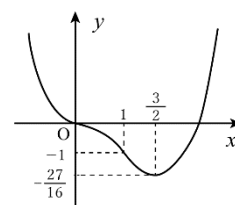
$y'' = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$

$x = \frac{3}{2}$ のとき, 極小値 $-\frac{27}{16}$, 極大値はない。

変曲点は $(0, 0)$, $(1, -1)$

グラフは右の図のようになる。

x	...	0	...	1	...	$\frac{3}{2}$	...
y'	-	0	-	-	-	0	+
y''	+	0	-	0	+	+	+
y	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{27}{16}$	$\nearrow$



(2)

$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$y' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$

$y'' = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (x+1)(x-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$

$x = 0$ のとき, 極大値 1, 極小値はない。

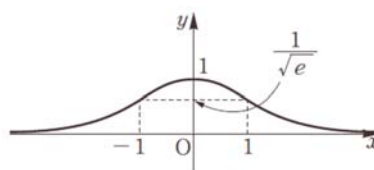
変曲点は $\left(\pm 1, \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ より, x 軸が漸近線である。

偶関数よりグラフは y 軸に関して対称である。

以上より, グラフは右の図のようになる。

x	...	-1	...	0	...	1	...
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
y	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$



(3) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

定義域は $x \neq \pm 1$

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2 - 1) - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

極値はない。変曲点は $(0, 0)$

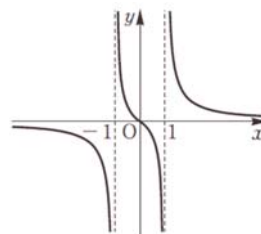
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} y = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} y = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} y = -\infty$$

より、 x 軸、直線 $x = \pm 1$ が漸近線である。

以上より、グラフは上の図のようになる。

x	...	-1	...	0	...	1	...
y'	-	/	-	-	-	/	-
y''	-	/	+	0	-	/	+
y	↘	/	↘	0	↘	/	↘



(4) $y = x - 2\sqrt{x}$

定義域は $x \geq 0$

$$y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \quad y'' = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

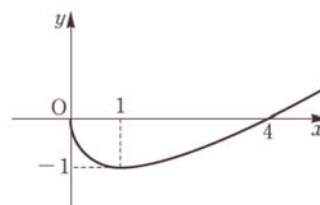
$x = 1$ のとき、極小値 -1

極大値、変曲点はない。

$\lim_{x \rightarrow +0} y' = -\infty$ より、 $(0, 0)$ で y 軸と接している。

以上より、グラフは右の図のようになる。

x	0	...	1	...
y'	/	-	0	+
y''	/	+	+	+
y	0	↘	-1	↗



練習 14

$$y = \sqrt{1-x}$$

$y' = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ より $(t, \sqrt{1-t})$ における接線の方程式は

$$y - \sqrt{1-t} = -\frac{1}{2\sqrt{1-t}}(x-t)$$

この接線が x 軸および y 軸と交わる点を、それぞれ P , Q とすると

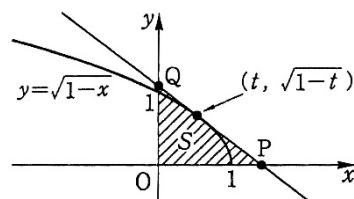
$P(2-t, 0)$, $Q(0, \frac{2-t}{2\sqrt{1-t}})$ であるから, $\triangle OPQ$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot (2-t) \cdot \frac{2-t}{2\sqrt{1-t}} = \frac{(2-t)^2}{4\sqrt{1-t}}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{-2(2-t)\sqrt{1-t} - (2-t)^2 \left(-\frac{1}{2\sqrt{1-t}}\right)}{4(1-t)} = -\frac{(3t-2)(t-2)}{8(1-t)\sqrt{1-t}}$$

$0 < t < 1$ における増減表は次のとおり。

t	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$\frac{dS}{dt}$	/	-	0	+	/
S	/	$\searrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	/



よって, $t = \frac{2}{3}$ のとき, 最小値 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

練習 15

(1) $f(x) = x - \log(1+x)$ とおくと $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1}$

$x > 0$ のとき $f'(x) > 0$

したがって, $f(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。

よって, $x > 0$ のとき $f(x) > f(0)$

ここで $f(0) = 0$ であるから $f(x) > 0$

ゆえに $\log(1+x) < x$ (終)

(2) $f(x) = x - \sin x$ とおくと $f'(x) = 1 - \cos x$

したがって, $f(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。

よって, $x > 0$ のとき $f(x) > f(0)$

ここで $f(0) = 0$ であるから $f(x) > 0$

よって $\sin x < x$ (終)

練習 16

$$f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \text{ とおくと } f'(x) = e^x - 1 - x$$

例題10の結果から、 $x > 0$ のとき $e^x > 1 + x$ であるから、 $f'(x) > 0$

したがって、 $f(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。 よって、 $x > 0$ のとき $f(x) > f(0)$

ここで、 $f(0) = 0$ であるから $f(x) > 0$ ゆえに $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (終)

練習 17

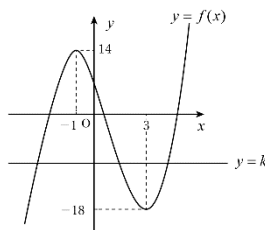
(1) 方程式より $x^3 - 3x^2 - 9x + 9 = k$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 9 \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	14	$\searrow$	-18	$\nearrow$



$y = f(x)$ と $y = k$ のグラフの共有点の個数を調べると、

求める異なる実数解の個数は

$-18 < k < 14$ のとき 3個

$k = 14, -18$ のとき 2個

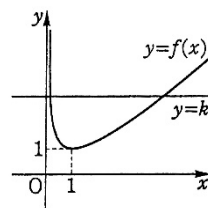
$k < -18, 14 < k$ のとき 1個

(2) 方程式より $x - \log x = k$

$$f(x) = x - \log x \text{ とおくと } f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$\searrow$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	1	$\nearrow$



$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \log x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{e^x}{x} = \infty$$

$y = f(x)$ と $y = k$ のグラフの共有点の個数を調べると、求める異なる実数解の個数は

$k > 1$ のとき 2個

$k = 1$ のとき 1個

$k < 1$ のとき 0個

- (3) $x = 0$ は方程式の解ではないから $\frac{e^x}{x^2} = k$ と変形して調べる。

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} \text{ とおくと } f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$$

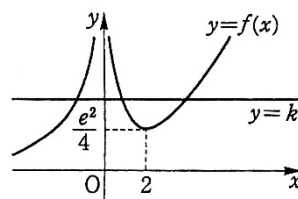
よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	/	-	0	+
$f(x)$	↗	/	↘	$\frac{e^2}{4}$	↗

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$



$y = f(x)$ と $y = k$ のグラフの共有点の個数を調べると、求める異なる実数解の個数は

$$k > \frac{e^2}{4} \text{ のとき } \quad 3 \text{ 個}$$

$$k = \frac{e^2}{4} \text{ のとき } \quad 2 \text{ 個}$$

$$0 < k < \frac{e^2}{4} \text{ のとき } \quad 1 \text{ 個}$$

$$k \leq 0 \text{ のとき } \quad 0 \text{ 個}$$

- (4) $x^2 + 1 \neq 0$ だから方程式を $\frac{x}{x^2 + 1} = k$ と変形して調べる。

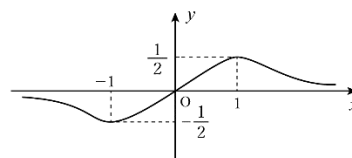
$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \text{ とおくと } f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2 + 1)^2}$$

よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$



$y = f(x)$ と $y = k$ のグラフの共有点の個数を調べると、

求める異なる実数解の個数は

$$-\frac{1}{2} < k < 0, \quad 0 < k < \frac{1}{2} \text{ のとき } \quad 2 \text{ 個}$$

$$k = -\frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{1}{2} \text{ のとき } \quad 1 \text{ 個}$$

$$k < -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < k \text{ のとき } \quad 0 \text{ 個}$$

練習 18

$(\cos x)' = -\sin x$ であるから、 h が 0 に近い値のとき

$$\cos(a+h) \doteq \cos a + (-\sin a)h = \cos a - h \sin a$$

これを用いて

$$\cos 31^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \doteq \cos \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{2} \doteq 0.8573$$

練習 19

$$(1) \quad f(x) = \tan x \text{ とおくと } f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$x \text{ が } 0 \text{ に近い値のとき } \tan x \doteq \tan 0 + \frac{1}{\cos^2 0} \cdot x = x \quad \text{よって} \quad \tan x \doteq x$$

$$(2) \quad f(x) = e^x \text{ とおくと } f'(x) = e^x$$

$$x \text{ が } 0 \text{ に近い値のとき } e^x \doteq e^0 + e^0 \cdot x = 1 + x \quad \text{よって} \quad e^x \doteq 1 + x$$

練習 20

$$(1) \quad (1.0005)^{10} = (1 + 0.0005)^{10} \\ \doteq 1 + 10 \times 0.0005 = 1.005$$

$$(2) \quad \sqrt[4]{10016} = \sqrt[4]{1.0016 \times 10^4} = (1 + 0.0016)^{\frac{1}{4}} \times 10 \\ \doteq \left(1 + \frac{1}{4} \times 0.0016\right) \times 10 = 10.004$$

練習 21

$$(1) \quad v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 3, \quad a = \frac{dv}{dt} = 6t$$

また、 $t \geq 0$ のとき

$$v = 3t^2 - 3 < 0 \quad \text{より} \quad 0 < t < 1$$

$$v = 3t^2 - 3 > 0 \quad \text{より} \quad t > 1$$

よって、運動の向きが負から正に変わるのは $t = 1$

$$(2) \quad v = \frac{dx}{dt} = 6 \cos 2t, \quad a = \frac{dv}{dt} = -12 \sin 2t$$

また、 $0 \leq x \leq \pi$ のとき

$$v = 6 \cos 2t < 0 \quad \text{より} \quad \frac{\pi}{2} < 2t < \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} < t < \frac{3}{4}\pi$$

$$v = 6 \cos 2t > 0 \quad \text{より} \quad 0 < 2t < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{2}\pi < 2t < 2\pi$$

$$\therefore 0 < t < \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3}{4}\pi < t < \pi$$

よって、運動が負から正に変わるのは $t = \frac{3}{4}\pi$

練習 22

水を注ぎはじめてから t 秒後の水面の面積を $S \text{ cm}^2$ とする。

$$r : h = 8 : 16 \text{ より } r = \frac{1}{2}h$$

$$\text{よって } S = \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi h^2$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2} \pi h \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\text{例題 11 より, } \frac{dh}{dt} = \frac{4}{9\pi} \text{ と } h = 6 \text{ を代入して } \frac{dS}{dt} = \frac{4}{3} \text{ (cm}^2/\text{秒)}$$

$$(\text{別解}) \quad S = \frac{1}{4} \pi h^2, \quad V = \frac{1}{12} \pi h^3$$

$$\frac{dS}{dV} = \frac{\frac{dS}{dh}}{\frac{dV}{dh}} = \frac{\frac{1}{2} \pi h}{\frac{1}{4} \pi h^2} = \frac{2}{h}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{2}{h} \cdot 4 = \frac{8}{h}$$

$$h = 6 \text{ を代入して } \frac{dS}{dt} = \frac{4}{3} \text{ (cm}^2/\text{秒)}$$

節末問題

1.

$$(1) \quad y' = -\frac{8}{x^3} \text{ より } x = -2 \text{ を代入して接線の傾きは } 1$$

$$\text{よって, 接線の方程式は } y - 1 = x + 2 \text{ すなわち } y = x + 3$$

$$(2) \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ より } y' = 2 \text{ とすると } \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{ゆえに } x = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{よって, 求める接線の方程式は接点が } \left(\frac{\pi}{4}, 1 \right) \text{ のとき } y - 1 = 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{すなわち } y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

$$\text{接点が } \left(-\frac{\pi}{4}, -1 \right) \text{ のとき } y + 1 = 2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{すなわち } y = 2x + \frac{\pi}{2} - 1$$

$$(3) \quad y = \frac{1}{x} \text{ より } y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{曲線上の点 } \left(a, \frac{1}{a} \right) \text{ における接線の方程式は } y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2} (x - a) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ が点 } (4, -2) \text{ を通るとき } -2 - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2} (4 - a)$$

$$a^2 + a - 2 = 0 \quad \text{ゆえに } a = 1, -2$$

よって, 求める接線の方程式は, ①より

$$a = 1 \text{ のとき } y = -x + 2 \quad a = -2 \text{ のとき } y = -\frac{1}{4}x - 1$$

2.

$$(1) \quad y' = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$

よって、すべての実数 x において y は増加するから極値はなし。また

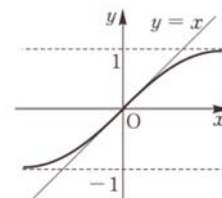
$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$$

であることから、

直線 $y = 1$, $y = -1$ が漸近線である。 $f'(0) = 1$

であることに注意してグラフをかくと右の図のようになる。



(2) 定義域は $x^2 - 1 \neq 0$ から $x \neq \pm 1$

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{(x^2 - 1)^2}$$

よって、増減表は次のようになる。

x	...	$-\sqrt{3}$	...	-1	...	0	...	1	...	$\sqrt{3}$	...
y'	+	0	-	/	-	0	-	/	-	0	+
y	↗	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	/	↘	0	↘	/	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗

$x = -\sqrt{3}$ のとき、極大値 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$x = \sqrt{3}$ のとき、極小値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

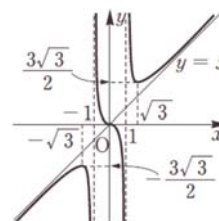
また $y = x + \frac{x}{x^2 - 1}$ より $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$

したがって、直線 $y = x$ が漸近線である。 さらに

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} y = -\infty$$

であり、 $x = \pm 1$ も漸近線となることから、グラフは上の図のようになる。



3.

(1) $y = xe^{-x}$

$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$$y'' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$$

よって、増減、凹凸は次の表のようになる。

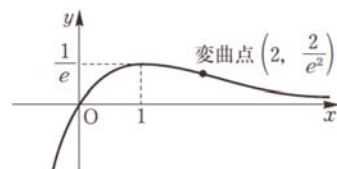
x	...	1	...	2	...
y'	+	0	-	-	-
y''	-	-	-	0	+
y	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘

$x = 1$ のとき 極大値 $\frac{1}{e}$

極小値はなし。変曲点は $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ より x 軸が漸近線である。また、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$

以上から、グラフは右の図のようになる。



(2) $y = (\log x)^2$

定義域は $x > 0$ $y' = 2(\log x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \log x$

$$y'' = -\frac{2}{x^2} \log x + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2(\log x - 1)}{x^2}$$

よって、増減、凹凸は次の表のようになる。

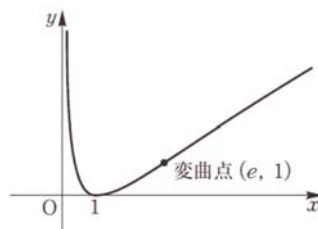
x	0	...	1	...	e	...
y'	↘	-	0	+	+	+
y''	↘	+	+	+	0	-
y	↘	↘	0	↗	1	↗

$x = 1$ のとき、極小値 0、極大値はなし。

変曲点は $(e, 1)$ $\lim_{x \rightarrow +0} y = \infty$ より y 軸が漸近線である。

また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$

以上から、グラフは右の図のようになる。



(3) $y = x - 2 \sin x$

$y' = 1 - 2 \cos x$

$y' = 0$ となるのは $\cos x = \frac{1}{2}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) から $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$

$y'' = 2 \sin x$

$y'' = 0$ となるのは $x = 0, \pi, 2\pi$

よって、増減、凹凸の表は次のようになる。

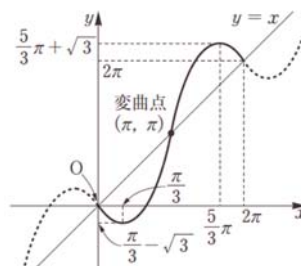
x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π	...	$\frac{5}{3}\pi$	...	2π
y'	-1	-	0	+	+	+	0	-	-1
y''	0	+	+	+	0	-	-	-	0
y	0	↘	$\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$	↗	π	↗	$\frac{5}{3}\pi + \sqrt{3}$	↘	2π

表から $x = \frac{\pi}{3}$ のとき、極小値 $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$

$x = \frac{5}{3}\pi$ のとき、極大値 $\frac{5}{3}\pi + \sqrt{3}$

変曲点は (π, π)

以上から、グラフは右の図のようになる。



4. $y' = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$

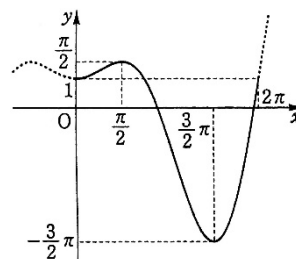
$y' = 0$ となるのは $x \cos x = 0$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) より $x = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
y'	0	+	0	-	0	+	+
y	1	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}\pi$	↗	1

よって、増減表から

$x = \frac{\pi}{2}$ のとき、最大値 $\frac{\pi}{2}$

$x = \frac{3}{2}\pi$ のとき、最小値 $-\frac{3}{2}\pi$



5. $y' = -\frac{1}{x}$ より, 点 $(t, -\log t)$ における接線の方程式は

$$y - (-\log t) = -\frac{1}{t}(x - t)$$

$$\text{すなわち } y = -\frac{1}{t}x + 1 - \log t \quad \dots\dots ①$$

①と x 軸, y 軸との交点をそれぞれ P , Q とすると

$$P(t(1 - \log t), 0), Q(0, 1 - \log t)$$

よって, $\triangle OPQ$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot t(1 - \log t) \cdot (1 - \log t) = \frac{1}{2} t(1 - \log t)^2$$

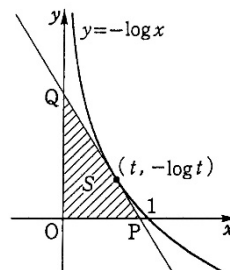
$$\begin{aligned} \text{これから } \frac{dS}{dt} &= \frac{1}{2}(1 - \log t)^2 + \frac{1}{2}t \cdot 2(1 - \log t) \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \log t)^2 - (1 - \log t) = \frac{1}{2}(\log t + 1)(\log t - 1) \end{aligned}$$

$$\frac{dS}{dt} = 0 \text{ となるのは, } 0 < t < 1 \text{ より } t = \frac{1}{e}$$

よって, 増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{e}$	...	1
S'	/	+	0	-	/
S	/	↗	$\frac{2}{e}$	↘	/

よって, $t = \frac{1}{e}$ のとき, 最大値 $\frac{2}{e}$



- 6.

$$(1) \quad f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \text{ とおくと } f'(x) = -\sin x + x \quad f''(x) = 1 - \cos x$$

ここで, $f''(x) \geq 0$ (等号は $x = 2n\pi$, n は整数)

したがって, $f'(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。

$$f'(0) = 0 \text{ より } x > 0 \text{ のとき } f'(x) > 0$$

よって, $f(x)$ は $x \geq 0$ で増加し, $f(0) = 0$ より $f(x) > 0$

$$\text{ゆえに } 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x \quad (\text{終})$$

$$(2) \quad f(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \text{ とおくと } f'(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

(1) の結果から $x > 0$ のとき $f'(x) > 0$

したがって, $f(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。

$$\text{また, } f(0) = 0 \text{ であるから } f(x) > 0 \quad \text{ゆえに } x - \frac{x^3}{6} < \sin x \quad (\text{終})$$

7.

$y' = -\frac{1}{x^2}$ から, $y = \frac{1}{x}$ 上の任意の点 $\left(t, \frac{1}{t}\right)$ における接線の方程式は

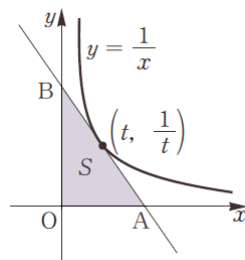
$$y - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}$$

$x = 0$ とすると $y = \frac{1}{t}$, $y = 0$ とすると $x = 2t$ だから

$A(2t, 0)$, $B(0, \frac{2}{t})$ $t > 0$ である。

よって, $\triangle OAB$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot \frac{2}{t} = 2 \quad (\text{一定}) \quad (\text{終})$$



8. $y = e^x$ より $y' = e^x$ $y = k\sqrt{x}$ より $y' = \frac{k}{2\sqrt{x}}$

共有点の x 座標を α ($\alpha > 0$) とおくと

$$e^\alpha = k\sqrt{\alpha} \quad \dots\dots ①$$

$$e^\alpha = \frac{k}{2\sqrt{\alpha}} \quad \dots\dots ② \quad ① \div ② \text{ より } 1 = 2\alpha$$

よって $\alpha = \frac{1}{2}$ これを①に代入して $\sqrt{e} = \frac{k}{\sqrt{2}}$ より $k = \sqrt{2e}$

9. $f(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ とおくと

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \quad \text{から}$$

$x > 0$ のとき $f'(x) > 0$

したがって, $f(x)$ は $x \leq 0$ で増加し, $f(0) = 0$ であるから,

$x > 0$ のとき $f(x) > 0$

ゆえに $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) \quad \dots\dots ①$

次に, $g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log(1+x)$ とおくと $g'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} = \frac{x^3}{1+x}$

したがって, $x > 0$ のとき $g'(x) > 0$ となり, $g(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。

$g(0) = 0$ であるから $x > 0$ のとき $g(x) > 0$

ゆえに $\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \dots\dots ②$

したがって, ①, ②より $x > 0$ のとき

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad (\text{終})$$

10.

$$(1) \quad f(x) = \sqrt{x} - \log x \text{ とおくとき } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

$$f'(x) = 0 \text{ となるのは, } \sqrt{x} - 2 = 0 \text{ から } x = 4$$

よって, 増減表は次のようになる。

x	0	...	4	...
$f'(x)$	/	-	0	+
$f(x)$	/	↘	$2 - \log 4$	↗

ここで, $2 - \log 4 = \log \frac{e^2}{4}$ の値を調べると $2 < e < 3$ から $4 < e^2 < 9$

$$\text{よって } 1 < \frac{e^2}{4} \text{ すなわち } \log \frac{e^2}{4} > 0$$

したがって, $x > 0$ のとき, $f(x)$ の最小値 $2 - \log 4 > 0$ であるから $f(x) > 0$

ゆえに $x > 0$ のとき $\log x < \sqrt{x}$

$$(2) \quad x > 1 \text{ のとき, (1) の結果から } 0 < \frac{\log x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \text{ より } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

$$(3) \quad y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$y' = 0 \text{ となるのは, } 1 - \log x = 0 \text{ より } x = e$$

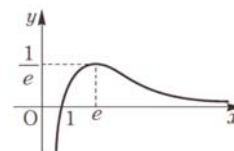
よって, 増減表は右のようになる。

(2)の結果から x 軸が漸近線であり

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty \text{ から } y \text{ 軸も漸近線となる。}$$

グラフは右の図のようになる。

x	0	...	e	...
y'	/	+	0	-
y	/	↗	$\frac{1}{e}$	↘



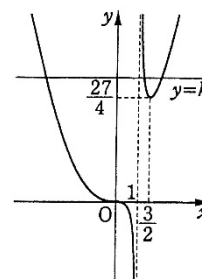
11.

$$(1) \quad f(x) = \frac{x^3}{x-1} \text{ より } f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$$

x	...	0	...	1	...	$\frac{3}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	-	/	-	0	+
$f(x)$	↘	0	↘	/	↘	$\frac{27}{4}$	↗

$$\text{また, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty$$

だから, 直線 $x=1$ が漸近線で, グラフは右の図のようになる。



(2) $x=1$ は $x^3=k(x-1)$ の解ではないから両辺を $x-1$ で割って $\frac{x^3}{x-1}=k$ として

$y=f(x)$ と $y=k$ のグラフの共有点の個数から異なる実数解の個数は

$k > \frac{27}{4}$ のとき, 3個 $k = \frac{27}{4}$ のとき, 2個 $k < \frac{27}{4}$ のとき, 1個

12. $x \doteq 0$ のとき, $f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$ だから

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ とすると } f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = -1$$

$$\text{よって, } \frac{1}{1+x} \doteq 1 - x$$

$$(2) \quad f(x) = \log(1+x) \text{ とすると } f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

$$\text{よって, } \log(1+x) \doteq x$$

13. 表面積を S , 体積を V とすると $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\text{これらを } t \text{ で微分すると } \frac{ds}{dt} = 8\pi \frac{dr}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\text{ここで, } \frac{dr}{dt} = 0.1 \quad r = 10 \text{ であるから}$$

$$\frac{ds}{dt} = 8\pi \times 10 \times 0.1 = \text{表面積 } 8\pi \text{ (cm}^2 \text{ / sec)}$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi \times 10^2 \times 0.1 = \text{体積 } 40\pi \text{ (cm}^3 \text{ / 秒)}$$