

2章 微分法 解答

1節 関数の極限 (p.44~61)

練習 1

$$(1) \quad 5 \qquad (2) \quad 1 \qquad (3) \quad \sqrt{3} \qquad (4) \quad 2 \qquad (5) \quad 0 \qquad (6) \quad -3$$

練習 2

$$(1) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1 \qquad (2) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x-2) = -4$$

$$(3) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) = -1 \quad (4) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (-x+1) = 2$$

練習 3

$$(1) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+1) = 3$$

$$(2) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(3x-2)}{(x+2)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x-2}{2x+3} = 8$$

$$(3) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

練習 4

$$(1) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$$

$$(2) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1}+1) = 2$$

$$(3) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x}-\sqrt{x+2})(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})}{(x-2)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4}$$

練習 5

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$ より, 極限值が存在するためには

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 0 \quad 4 + 2a + b = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad b = -2a - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{このとき} \quad \text{左辺} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 2a - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+a+2) = a+4$$

$$\text{したがって} \quad a+4=3 \quad \text{ゆえに} \quad a=-1$$

$$\textcircled{1} \text{から} \quad b = -2$$

逆に, $a = -1$, $b = -2$ のとき与えられた等式は成り立つ。

$$\text{よって} \quad a = -1, \quad b = -2$$

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$ より, 極限值が存在するためには

$$\lim_{x \rightarrow -1} (a\sqrt{x+2} + b) = 0 \quad a + b = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad b = -a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{このとき} \quad \text{左辺} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{a(\sqrt{x+2} - 1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{a(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x+2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{a}{\sqrt{x+2} + 1} = \frac{a}{2}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{a}{2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = 2$$

$$\textcircled{1} \text{から} \quad b = -2$$

逆に, $a = 2$, $b = -2$ のとき与えられた等式は成り立つ。

$$\text{よって} \quad a = 2, \quad b = -2$$

練習 6

(1) ∞ (2) $-\infty$

練習 7

(1) $-\infty$ (2) ∞ (3) ∞ (4) $-\infty$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1 \quad (6) \quad \infty$$

練習 8

(1) 0 (2) 0

$$(3) 1 \quad (4) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = -\infty$$

$$(5) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = -\infty \quad (6) \quad \infty$$

練習 9

$$(1) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$(3) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{5}{x^2}}{4 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}} = -\infty$$

練習 10

$$(1) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x} = 0$$

$$(2) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1}{1} = \infty$$

$$(3) \quad 1$$

$$(4) \quad 0$$

$$(5) \quad -\infty$$

$$(6) \quad \infty$$

練習 11

$$(1) \quad 1$$

$$(2) \quad 0$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{1 - \sin x} = 2$$

練習 12

$$(1) \quad \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1 \quad \text{から} \quad |x| \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

$$\text{よって, } 0 \leq \left| x \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad \text{だから, はさみうちの原理より}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

$$(2) \quad |\sin x| \leq 1 \quad \text{から} \quad \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\text{よって, } 0 \leq \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0 \quad \text{だから, はさみうちの原理より}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

練習 13

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$kx = t$ とおくと, $x \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

練習 14

$$(1) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 \right) = 1 \cdot 2 = 2$$

$$(2) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1$$

$$(3) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot 3 \right) = 3$$

$$(4) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 = 1^2 = 1$$

$$(5) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2$$

練習 15

$$(1) \quad \theta = x - \pi \quad \text{とおくと} \quad x = \theta + \pi$$

$x \rightarrow \pi$ のとき $\theta \rightarrow 0$ だから

$$\text{与式} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan(\theta + \pi)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \right) = 1$$

$$(2) \quad \theta = x - \frac{\pi}{2} \quad \text{とおくと} \quad x = \theta + \frac{\pi}{2}, \quad 2x - \pi = 2\theta$$

$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ のとき $\theta \rightarrow 0$ だから

$$\text{与式} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{2\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \theta = x - \pi \quad \text{とおくと} \quad x = \theta + \pi$$

$x \rightarrow \pi$ のとき $\theta \rightarrow 0$ だから

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\theta + \pi)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{\theta^2 (1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos \theta} \right) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos \theta} \right\} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

練習 16

(1) $f(1) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = 0 \quad \text{であるから} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{ が成り立つ。}$$

よって、 $f(x)$ は $x = 1$ で連続である。

(2) $f(1) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0 \quad \text{であるから} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$

よって、 $f(x)$ は $x = 1$ で連続でない。

練習 17

(1) 分母 $x-1 \neq 0$ より $x < 1, 1 < x \quad \therefore (-\infty, 1), (1, \infty)$

(2) $2-x \geq 0$ より $x \leq 2 \quad \therefore (-\infty, 2)$

(3) 分母 $x^2 - 4 \neq 0$ より $x \neq \pm 2 \quad \therefore (-\infty, -2), (-2, 2), (2, \infty)$

練習 18

(1) $x = 1$ のとき最大値 2

(2) $x = 3$ のとき最大値 8

$x = 4$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$

$x = -1$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$

(3) $x = 0$ のとき最大値 1

(4) $x = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 1

$x = \pi$ のとき最小値 -1

$x = -\frac{\pi}{2}$ のとき最小値 -1

練習 19

$f(x) = x - \cos x$ とおくと、 $f(x)$ は区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ で連続であり、

$$f(0) = -1 < 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$$

であるから、方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

節末問題 (p.61)

1.

$$(1) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+4}{1+\frac{3}{x}} = -\infty \qquad (2) \quad \text{与式} = -\infty \qquad (3) \quad \text{与式} = 0$$

2.

$$(1) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x} = 3$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{与式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{3})(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

$$(3) \quad x = -t \quad \text{とおくと} \quad x \rightarrow -\infty \quad \text{のとき} \quad t \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(-t)^2 - t} - t \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sqrt{t^2 - t} - t \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2 - t} - t)(\sqrt{t^2 - t} + t)}{\sqrt{t^2 - t} + t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t}{\sqrt{t^2 - t} + t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{t}} + 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \text{与式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x}{\sin x} (1 + \cos x) \right\} = 1 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \text{与式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cos x \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = 2$$

$$(6) \quad x + \frac{\pi}{2} = \theta \quad \text{とおくと} \quad x = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad 2x + \pi = 2\theta$$

$$x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad \text{のとき} \quad \theta \rightarrow 0 \quad \text{だから}$$

$$\text{与式} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(2\theta - \pi)}{2\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin 2\theta}{\theta} \right) = -1$$

節末問題

3.

(1) $x = -t$ とおくと $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$

$$\text{与式} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2^{-t} - 2^t}{2^{-t} + 2^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2^{-2t} - 1}{2^{-2t} + 1} = -1$$

$$(2) \text{ 与式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log_2 \frac{x^2 + 4}{2x^2} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \log_2 \frac{1 + \frac{4}{x^2}}{2} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = 2$$

$x=1$ で連続であるためには

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2 \text{ が成り立てばよい。}$$

よって, $f(1) = 2$ より $a = 2$

5.

(1) $\angle AOC = \theta$ より $AC = OA \sin \theta = \sin \theta$

$$\overline{AB} = 1 \cdot \theta = \theta$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\overline{AB}}{AC} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\theta}{\sin \theta} = 1$$

(2) $BC = OB - OC = 1 - \cos \theta$ より

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{BC}{\overline{AB}^2} &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\theta^2 (1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\theta^2 (1 + \cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \cdot \frac{1}{2 + \cos \theta} \right\} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

6.

$f(x) = x + \log_2 x - 2$ とおくと

$f(x)$ は区間 $[1, 2]$ で連続であり

$$f(1) = 1 + \log_2 1 - 2 = -1 < 0$$

$$f(2) = 2 + \log_2 2 - 2 = 1 > 0$$

であるから, 方程式 $f(x) = 0$ は $1 < x < 2$ の範囲に

少なくとも一つの実数の解をもつ。