

1 章 数列 解答

2 節 数列の極限

練習 1

- (1) 0 に収束
- (2) 負の無限大に発散 ($-\infty$)
- (3) 正の無限大に発散 (∞)
- (4) 発散 (振動)

練習 2

- (1) 正の無限大に発散 (∞)
- (2) 負の無限大に発散 ($-\infty$)
- (3) 負の無限大に発散 ($-\infty$)
- (4) 発散 (振動)

練習 3

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \left(2 + \frac{1}{n^2} \right) = -1 \times 2 = -2 \qquad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{3^n} + \frac{1}{4^n} \right\} = 0 + 0 = 0$$

練習 4

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = 2 \qquad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - 1}{1 - \frac{3}{n^2}} = -1 \qquad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{3}{n}} = 0$$

練習 5

$$(1) \text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(1 - \frac{2}{n^2} \right) = \infty \qquad (2) \text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3 + \frac{1}{n^2}} = \infty$$

$$(3) \text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = 0$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 3n} - n)(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = \frac{3}{2}$$

練習 6

- (1) 公比 $r=3$ より $|r|>1$ だから ∞ に発散
- (2) 公比 $r=-2$ だから発散 (振動)
- (3) 公比 $r=-\frac{2}{3}$ より $|r|<1$ だから 0 に収束
- (4) 公比 $r=\frac{1}{\sqrt{3}}$ より $|r|<1$ だから 0 に収束

練習 7

$$(1) \quad \text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{4}{3} \right)^n + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} = \infty$$

$$(2) \quad \text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n} = 0$$

$$(3) \quad \text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(-\frac{3}{5} \right)^n}{5 + \frac{4}{5^n}} = \frac{1}{5}$$

練習 8

$$(1) \quad -1 < \frac{x}{2} \leq 1 \quad \text{より} \quad -2 < x \leq 2$$

$$\frac{x}{2} = 1 \text{ すなわち } x = 2 \text{ のとき極限值 } 1$$

$$-1 < \frac{x}{2} < 1 \text{ すなわち } -2 < x < 2 \text{ のとき極限值 } 0$$

$$(2) \quad -1 < x^2 - 2 \leq 1 \quad \text{より} \quad x^2 \leq 3 \quad \text{かつ} \quad 1 < x^2$$

$$x^2 \leq 3 \quad \text{から} \quad -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

$$x^2 > 1 \quad \text{から} \quad x < -1, \quad 1 < x$$

$$\text{よって, } -\sqrt{3} \leq x < -1, \quad 1 < x \leq \sqrt{3}$$

$$x^2 - 2 = 1 \text{ すなわち } x = \pm\sqrt{3} \text{ のとき極限值 } 1$$

$$-1 < x^2 - 2 < 1 \text{ すなわち } -\sqrt{3} < x < -1, \quad 1 < x < \sqrt{3} \text{ のとき極限值 } 0$$

練習 9 $a_n = \frac{2r^n}{1+r^n}$ とおく。

$$(1) \quad r > 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{r^n} + 1} = \frac{2}{0+1} = 2$$

$$(2) \quad r = 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1 \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2 \cdot 1}{1+1} = 1$$

$$(3) \quad |r| < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2 \cdot 0}{1+0} = 0$$

$$(4) \quad r < -1 \text{ のとき } |r| > 1 \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |r|^n = \infty$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{r^n} + 1} = \frac{2}{0+1} = 2$$

練習 10

(1) 部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = 1$ から、収束し、その和は 1 である。

(2) 部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1}} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \right\} = \frac{1}{2} (\sqrt{2n+1} - 1) \end{aligned}$$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\sqrt{2n+1} - 1) = \infty$ から、発散する。

練習 11

(1) 初項 1, 公比 $r = \frac{1}{2}$ より $|r| < 1$ であるから収束して、その和は $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

(2) 初項 2, 公比 $r = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ より $|r| < 1$ であるから収束して、その和は

$$\frac{2}{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = 4 - 2\sqrt{2}$$

(3) 初項 4, 公比 $r = -\frac{3}{2}$ より $|r| \geq 1$ であるから発散する。

(4) 初項 1, 公比 $r = -1$ より $|r| \geq 1$ であるから発散する。

練習 12 初項 x , 公比 $1-x$ より,

(i) 初項 $x = 0$ のとき、収束して、その和は 0

(ii) $|1-x| < 1$ すなわち、 $0 < x < 2$ のとき、収束して、その和は

$$\frac{x}{1 - (1-x)} = \frac{x}{x} = 1$$

練習 13

$$(1) \quad 0.\dot{4} = 0.4 + 0.04 + 0.004 + \dots$$

$$= \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{7}{10}} = \frac{4}{9}$$

$$(2) \quad 0.\dot{6}\dot{3} = 0.63 + 0.0063 + 0.000063 + \dots$$

$$= \frac{\frac{63}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$$

$$(3) \quad 0.4\dot{5}\dot{6} = 0.4 + 0.056 + 0.00056 + \dots$$

$$= 0.4 + \frac{\frac{56}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 0.4 + \frac{56}{990} = \frac{2}{5} + \frac{28}{495} = \frac{226}{495}$$

練習 14

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \text{ は初項 } 1, \text{ 公比 } \frac{1}{2} \text{ の無限等比級数}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} \text{ は初項 } 1, \text{ 公比 } \frac{1}{4} \text{ の無限等比級数で, } \left| \frac{1}{2} \right| < 1, \left| \frac{1}{4} \right| < 1 \text{ だからともに収束する。}$$

$$\text{よって, 与式} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \text{ は初項 } \frac{1}{3}, \text{ 公比 } \frac{1}{3} \text{ の無限等比級数}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9^n} \text{ は初項 } \frac{2}{9}, \text{ 公比 } \frac{1}{9} \text{ の無限等比級数で, } \left| \frac{1}{3} \right| < 1, \left| \frac{1}{9} \right| < 1 \text{ だからともに収束する。}$$

$$\text{よって, 与式} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \text{ は初項 } \frac{2}{3}, \text{ 公比 } \frac{2}{3} \text{ の無限等比級数}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \text{ は初項 } -\frac{1}{2}, \text{ 公比 } -\frac{1}{2} \text{ の無限等比級数で, } \left| \frac{2}{3} \right| < 1, \left| -\frac{1}{2} \right| < 1 \text{ だからともに収束する。}$$

$$\text{よって, 与式} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$(4) \quad \text{与式} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{3^n}{6^n} - \frac{(-2)^n}{6^n} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ は初項 } \frac{1}{2}, \text{ 公比 } \frac{1}{2} \text{ の無限等比級数}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \text{ は初項 } -\frac{1}{3}, \text{ 公比 } -\frac{1}{3} \text{ の無限等比級数で, } \left| \frac{1}{2} \right| < 1, \left| -\frac{1}{3} \right| < 1 \text{ だからともに収束する。}$$

$$\text{よって, 与式} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

節末問題

1.

$$(1) \quad -1 \leq \cos \frac{n\pi}{3} \leq 1 \quad \text{より} \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{3} \leq \frac{1}{n} \quad (2) \quad \text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1} = -\infty$$

$$\text{ここで, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{から}$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{3} = 0$$

$$(3) \quad \text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} = \infty \quad (4) \quad \text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-3)^n \left\{ \left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1 \right\} \text{より発散 (振動)}.$$

2.

$$(1) \quad a_n = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 1 & (n = 4k - 3 \quad k \text{ は正の整数}) \\ 0 & (n = 4k - 2 \quad \text{''}) \\ -1 & (n = 4k - 1 \quad \text{''}) \\ 0 & (n = 4k \quad \text{''}) \end{cases}$$

であるから, $n \rightarrow \infty$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ は発散 (振動) する。

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4n+3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \log_2 4 = 2 \quad (\text{収束})$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{収束})$$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2} \quad (\text{収束})$$

3.

(1) 初項 1, 公比 $\frac{1}{5}$ より $|r| < 1$ だから収束する。よって, $S = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$

$$(2) \quad S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right\}$$

$$\text{ここで } S - S_n = \frac{5}{4} - \frac{5}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right\} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\text{したがって, 条件から } \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} < 0.0001 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{ゆえに } \left(\frac{2}{10}\right)^{n-1} < 4 \times 10^{-4}$$

$$\text{両辺の常用対数をとって } \log_{10} \left(\frac{2}{10}\right)^{n-1} < \log_{10} (4 \times 10^{-4})$$

$$(n-1)(\log_{10} 2 - 1) < 2 \log_{10} 2 - 4$$

$$\log_{10} 2 = 0.3010 \text{ を代入して}$$

$$(n-1) \times (0.3010 - 1) < 2 \times 0.3010 - 4$$

$$n-1 > \frac{3.398}{0.699} = 4.8 \cdots$$

$$n > 5.8 \cdots$$

n は自然数であるから $n \geq 6$

(別解)

$$\textcircled{1} \text{ より } 2500 < 5^{n-1}$$

$$\text{一方 } 5^4 = 625, \quad 5^5 = 3125$$

$$\text{よって } n-1 \geq 5$$

$$n \geq 6$$

4. 最初の正方形 $A_1 B_1 BC_1$ を正方形 $A_1 B_1 C_0 C_1$ とし, n 番目につくられた正方形を正方形 $A_n B_n C_{n-1} C_n$, その一辺の長さを x_n とおくと

$$A_n B_{n+1} : A_{n+1} B_{n+1} = 1 : 2 \quad \text{より} \quad (x_n - x_{n+1}) : x_{n+1} = 1 : 2$$

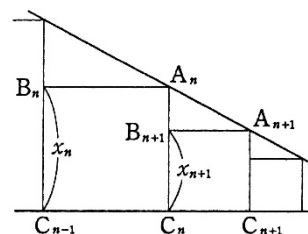
$$\text{よって } x_{n+1} = \frac{2}{3} x_n$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \text{ であることから } x_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

したがって, 求める面積の総和は

$$S = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right\}^2 + \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right\}^3 + \cdots = \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4}{5}$$



5.

(1) $a_n = 1 + \frac{1}{n}, b_n = 1 - \frac{1}{n}$ とすると

$a_n > b_n$ であるが, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ だから

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ となる。

(2) $a_n = n+1, b_n = n$ とすると

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ であるが

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1-n) = 1 \neq 0$ となる。

(3) $a_n = 2n, b_n = n$ とすると

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n} = 2$ であるが

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ となり発散する。