

1 章 数列 解答

1 節 数列とその和

練習 1

(1) 初項 1, 第 5 項 9

(2) 初項 1, 第 5 項 25

練習 2

(1) 1

(2) $\frac{10}{16}$

練習 3

(1) $a_1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5$, $a_2 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$, $a_3 = 4 \cdot 3 + 1 = 13$,
 $a_4 = 4 \cdot 4 + 1 = 17$, $a_5 = 4 \cdot 5 + 1 = 21$

(2) $a_1 = 1^3 = 1$, $a_2 = 2^3 = 8$, $a_3 = 3^3 = 27$,
 $a_4 = 4^3 = 64$, $a_5 = 5^3 = 125$

(3) $a_1 = (-1)^1 = -1$, $a_2 = (-1)^2 = 1$, $a_3 = (-1)^3 = -1$,
 $a_4 = (-1)^4 = 1$, $a_5 = (-1)^5 = -1$

練習 4

(1) 2, 4, 8, …… を数列 $\{a_n\}$ とすると

$a_1 = 2^1$, $a_2 = 2^2$, $a_3 = 2^3$, …… よって 一般項 $a_n = 2^n$

(2) $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, …… を数列 $\{a_n\}$ とすると

$a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$, $a_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^1$, $a_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$, …… よって 一般項 $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

練習 5

(1) 公差 d は $d = 5 - 1 = 4$

□の中は順に 13, 17

(2) 公差 d は $2d = 9 - 13 = -4$

よって $d = -2$ □の中は順に 11, 7, 5

練習 6

(1) $a_n = 5 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 3$

$a_{10} = 2 \cdot 10 + 3 = 23$

(2) $a_n = 30 + (n-1) \cdot (-6) = -6n + 36$

$a_{10} = -6 \cdot 10 + 36 = -24$

(3) 初項 -1, 公差 3 だから

$a_n = -1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 4$

$a_{10} = 3 \cdot 10 - 4 = 26$

(4) 初項 20, 公差 -7 だから

$a_n = 20 + (n-1) \cdot (-7) = -7n + 27$

$a_{10} = -7 \cdot 10 + 27 = -43$

練習 7

(1) 第 n 項は $a_n = 29 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 32$

よって, $-3n + 32 = -13$ より $n = 15$

したがって, -13 は 第 15 項

(2) $a_n = -3n + 32 < 0$ より $n > \frac{32}{3} = 10.6\cdots$ よって, 第 11 項

(3) $a_n = -3n + 32 = 4$ より $n = \frac{28}{3} = 9.3\cdots$

$a_n = 4$ を満たす自然数がないから 4 はこの数列の項になっていない。

練習 8

初項を a , 公差を d とすると

(1)
$$\begin{cases} a_3 = a + 2d = -1 & \cdots \textcircled{1} \\ a_6 = a + 5d = 5 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を解いて, $a = -5, d = 2$

よって $a_n = -5 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 7$

(2)
$$\begin{cases} a_2 = a + d = 5 & \cdots \textcircled{1} \\ a_7 = a + 6d = -10 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を解いて, $a = 8, d = -3$

$a_n = 8 + (n-1)(-3) = -3n + 11$

練習 9

($\implies$ について)

a, b, c がこの順で等差数列のとき

$b - a = c - b$ ゆえに $2b = a + c$

($\longleftarrow$ について)

逆に, $2b = a + c$ のとき

$b - a = c - b$ となり, $b - a$ と $c - b$ の差が等しいから等差数列となる。

練習 10

$2(a+6) = a^2 + 4$ より

$a^2 - 2a - 8 = 0$

$(a-4)(a+2) = 0$

$\therefore a = 4, -2$

練習 11

(1) 初項 1, 末項 29, 項数 10 だから $S_{10} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (1 + 29) = 150$

(2) 初項 3, 公差 4, 項数 15 だから
$$S_{15} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \{2 \cdot 3 + (15-1) \cdot 4\}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 62 = 465$$

練習 12

初項 16, 公差 -4 だから, 第 n 項までの和は

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2 \cdot 16 + (n-1) \cdot (-4)\} = -20$$

ゆえに $n^2 - 9n - 10 = 0$

$$(n-10)(n+1) = 0$$

$$\therefore n = 10, -1$$

n は自然数だから $n = 10$ よって, 初項から第 10 項までの和

練習 13

2, 4, 6, $\dots$, $2n$ は初項 2, 公差 2, 項数 n の等差数列である。

よって, その和は $S_n = \frac{1}{2}n\{2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 2\}$

$$= \frac{1}{2}n(2n+2) = n(n+1)$$

(別解)

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

練習 14

(1) 初項 1, 公比 -5

(2) 初項 96, 公比 $\frac{1}{2}$

練習 15

$$(1) a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, a_7 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{3}{64}$$

(2) 初項 1, 公比 -3 だから

$$a_n = 1 \cdot (-3)^{n-1} = (-3)^{n-1}, a_7 = (-3)^6 = 729$$

(3) 初項 2, 公比 $-\frac{3}{2}$ だから

(4) 初項 $0.1 = \frac{1}{10}$, 公比 $0.1 = \frac{1}{10}$ だから

$$a_n = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}, a_7 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^6 = \frac{729}{32}$$

$$a_n = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{10^n}, a_7 = \frac{1}{10^7}$$

練習 16

(1) 一般項は $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ だから

$$2 \cdot 3^{n-1} = 54 \text{ より } 3^{n-1} = 27 = 3^3$$

$$n-1 = 3 \therefore n = 4$$

よって, 54 は第 4 項

(2) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} > 400$ より $3^{n-1} > 200$

$$3^4 = 81, 3^5 = 243 \text{ であるから } n-1 = 5 \therefore n = 6$$

よって, 第 6 項

練習 17

初項を a , 公比を r とすると

$$a_3 = ar^2 = 27 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_6 = ar^5 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{ より } \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{1}{27} \quad \therefore r^3 = \frac{1}{27} \text{ より } r = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ に代入して, } a \cdot \frac{1}{9} = 27 \text{ より } a = 243 \quad \text{よって, } a_n = 243 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

練習 18

($\implies$ について)

a, b, c がこの順に等比数列のとき, この等比数列の公比を r とすると

$b = ar, c = br = ar^2$ と表すことができる。これを用いると

$$b^2 = (ar)^2 = a^2 r^2 = a \cdot (ar^2) = ac$$

($\Longleftarrow$ について)

$$\text{逆に, } b^2 = ac \text{ のとき } b \cdot b = ac \text{ より } \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

b と a, c と b の比が等しいことから a, b, c はこの順に等比数列である。

練習 19

$$(b+2)^2 = 9b \text{ より}$$

$$b^2 - 5b + 4 = 0$$

$$(b-1)(b-4) = 0$$

$$\therefore b = 1, 4$$

練習 20

$$(1) \quad S_n = \frac{1 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} = \frac{1}{3} (4^n - 1)$$

$$(2) \quad S_n = \frac{3 \cdot \{1 - (-2)^n\}}{1 + 2} = 1 - (-2)^n$$

(3) 初項を a , 公比を r とすると

$$ar^2 = 18 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$ar^5 = 486 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{ より } \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{486}{18} \quad \text{ゆえに } r^3 = 27 \text{ より } r = 3$$

$$\textcircled{1} \text{ に代入して, } a = 2 \quad \text{よって, } S_n = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1$$

(4) 4, 8, 16, ……

初項 4, 公比 2 だから

$$S_n = \frac{4(2^n - 1)}{2 - 1} = 4(2^n - 1)$$

$$(5) \quad S_n = \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$(6) \quad S_n = \frac{3 \left\{ 1 - (-2)^n \right\}}{1 - (-2)} = 1 - (-2)^n$$

練習 21

$$\begin{aligned} (1) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 50^2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot 50 \cdot (50 + 1) \cdot (2 \cdot 50 + 1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 50 \cdot 51 \cdot 101 \\ &= 42925 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot (n-1) \cdot \{(n-1) + 1\} \{2(n-1) + 1\} \\ &= \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) \\ &= \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) \end{aligned}$$

練習 22

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n 3k = 3 + 6 + 9 + \cdots + 3n$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^5 (7 - 2k) = 5 + 3 + 1 - 1 - 3$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{10} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \sum_{k=1}^n 2 \cdot 5^{k-1} &= 2 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-1} \\ &= 2 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-1} \end{aligned}$$

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1} = 3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-2}$$

練習 23

$$(1) \quad \sum_{k=1}^5 (3k+1) = 4 + 7 + 10 + 13 + 16$$

$$\sum_{i=2}^6 (3i-2) = 4 + 7 + 10 + 13 + 16$$

$$\text{よって, } \sum_{k=1}^5 (3k+1) = \sum_{i=2}^6 (3i-2)$$

$$(2) \quad \sum_{k=5}^{10} k^2 = 5^2 + 6^2 + \cdots + 10^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^4 k^2 &= (1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \\ &= 5^2 + 6^2 + \cdots + 10^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって } \sum_{k=5}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^4 k^2$$

練習 24

$$(1) \sum_{k=1}^n (5k - 3)$$

$$(2) \sum_{k=1}^n 3^{k-1}$$

(3) 一般項は $a_n = 10^{n-1}$ で初項から第 100 項までの和だから

$$\sum_{k=1}^{100} 10^{k-1} \left(\sum_{k=0}^{99} 10^k, \sum_{i=1}^{100} 10^{i-1} \text{ などもある} \right)$$

(4) 一般項は $a_n = n(n+2)$

初項から 10 項までの和だから

$$\sum_{k=1}^{10} k(k+2)$$

練習 25

$$(1) \sum_{k=1}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n = n(n+2)$$

$$(2) \sum_{k=1}^n (3k^2 - 2k) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k = 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ = \frac{1}{2} n(n+1) \{ (2n+1) - 2 \} = \frac{1}{2} n(n+1)(2n-1)$$

$$(3) \sum_{k=1}^n k(k^2 - 6) = \sum_{k=1}^n k^3 - 6 \sum_{k=1}^n k = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ = \frac{1}{4} n(n+1) \{ n(n+1) - 12 \} = \frac{1}{4} n(n+1)(n+4)(n-3)$$

$$(4) \sum_{k=1}^n (3^k - 2^k) = \sum_{k=1}^n 3^k - \sum_{k=1}^n 2^k = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} - \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = \frac{3^{n+1} - 3}{2} - (2^{n+1} - 2) = \frac{1}{2} (3^{n+1} - 2^{n+2} + 1)$$

$$(5) \sum_{k=1}^{n-1} (4k+1) = 4 \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1 = 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) \\ = 2n^2 - n - 1 \quad (n \geq 2)$$

$$(6) \sum_{k=1}^{2n} k^2 = \frac{1}{6} 2n(2n+1)(4n+1)$$

練習 26

第 k 項は $a_k = k(3k+1)$ だから

$$S_n = \sum_{k=1}^n k(3k+1) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\ = 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) \\ = \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1+1) = n(n+1)^2$$

練習 27

第 k 項は $a_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$ だから

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

練習 28

(1) $a_1 = 2$

$$a_2 = 2a_1 = 4$$

$$a_3 = 2a_2 = 8$$

$$a_4 = 2a_3 = 16$$

$$a_5 = 2a_4 = 32$$

(2) $a_1 = 1$

$$a_2 = a_1 + 1 + 1 = 3$$

$$a_3 = a_2 + 2 + 1 = 6$$

$$a_4 = a_3 + 3 + 1 = 10$$

$$a_5 = a_4 + 4 + 1 = 15$$

練習 29

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + n$ より

$$a_2 = a_1 + 1 = 2 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 2 + 1 + 2$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 2 + 1 + 2 + 3$$

$\vdots$

$$a_n = a_{n-1} + n - 1 = 2 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$$

$$= 2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 2$$

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$ より

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2(2 + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1$$

$$a_4 = 2a_3 + 1 = 2(2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$

$\vdots$

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

練習 30

(1) 与えられた等式を①とおく。

(I) $n = 1$ のとき

(左辺) $= 2$, (右辺) $= 1 \cdot (1 + 1) = 2$ よって, $n = 1$ のとき①が成り立つ。

(II) $n = k$ のとき, ①が成り立つと仮定すると

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k + 1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$n = k + 1$ のとき, ①の左辺を, ②を用いて変形すると

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) &= k(k + 1) + 2(k + 1) \\ &= (k + 1)(k + 2) \end{aligned}$$

したがって, $n = k + 1$ のときも①が成り立つ。

(I), (II) により, すべての自然数 n について与えられた式は成り立つ。

(2) 与えられた等式を①とおく。

(I) $n = 1$ のとき

$$(\text{左辺}) = 1 \cdot 1 = 1, (\text{右辺}) = (1-1) \cdot 2^1 + 1 = 1$$

よって, $n = 1$ のとき①が成り立つ。

(II) $n = k$ のとき, ①が成り立つとすると

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + k \cdot 2^{k-1} = (k-1) \cdot 2^k + 1 \cdots \cdots ②$$

$n = k+1$ のとき①の左辺を, ②を用いて変形すると

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + k \cdot 2^{k-1} + (k+1) \cdot 2^k$$

$$= (k-1) \cdot 2^k + 1 + (k+1) \cdot 2^k$$

$$= 2k \cdot 2^{k+1} = k \cdot 2^{k+1} + 1$$

したがって, $n = k+1$ のときにも成り立つ。

(I), (II) により, すべての自然数 n について与えられた等式は成り立つ。

練習 31

(1) 与えられた不等式を①とおく。

(I) $n = 3$ のとき $(\text{左辺}) = 2^3 = 8$

$$(\text{右辺}) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

よって, $n = 3$ のとき①が成り立つ。

(II) $n = k$ ($k \geq 4$) のとき, ①が成り立つと仮定すると

$$2^k > 2k + 1 \cdots \cdots ②$$

$n = k+1$ のとき, ①の左辺を②を用いて変形すると

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k+1)$$

$$= 4k + 2 = 2k + 2 + 2k$$

$$> 2(k+1) + 1$$

$$\text{よって, } 2^{k+1} > 2(k+1) + 1$$

したがって, $n = k+1$ のときも①が成り立つ。

(I), (II) により, 3 以上のすべての自然数 n について与えられた不等式は成り立つ。

(2) 与えられた不等式を①とおく

(I) $n = 3$ のとき

$$(\text{左辺}) = 3^2 = 9, (\text{右辺}) = 1 + 2 + 3 = 6$$

よって, $n = 3$ のとき①が成り立つ。

(II) $n = k$ ($k \geq 4$) のとき, ①が成り立つと仮定すると

$$k^2 > 1 + 2 + 3 + \cdots + k \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$n = k + 1$ のとき, ①の左辺を②を用いて変形すると

$$\begin{aligned} (k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 > (1 + 2 + 3 + \cdots + k) + 2k + 1 \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) + k \\ &> 1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) \end{aligned}$$

$$\text{よって, } (k+1)^2 > 1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1)$$

したがって, $n = k + 1$ のときにも①は成り立つ。

(I), (II) により, 3 以上のすべての自然数 n について与式は成り立つ。

(3) 与えられた不等式を①とおく。

(I) $n = 3$ のとき

$$(\text{左辺}) = 3^3 = 27, (\text{右辺}) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

よって, $n = 3$ のとき①が成り立つ。

(II) $n = k$ ($k \geq 4$) のとき, ①が成り立つとすると

$$k^3 > 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$n = k + 1$ のとき, ①の左辺を②を用いて変形すると

$$\begin{aligned} (k+1)^3 &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 > (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 + 2k^2 + k \\ &> 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k+1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } (k+1)^3 > 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k+1)^2$$

したがって, $n = k + 1$ のときにも①は成り立つ。

(I), (II) により, 3 以上の自然数 n について与式は成り立つ。

節末問題

1.

(1) 初項を a , 公差を d とすると

$$\frac{10}{2}(2a + 9d) = 140 \quad \therefore 2a + 9d = 28 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{20}{2}(2a + 19d) = 140 + 540 \quad \therefore 2a + 19d = 68 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を解いて 初項 -4 , 公差 4

$$(2) \quad \frac{30}{2}\{2 \cdot (-4) + 29 \cdot 4\} - (140 + 540) = 15 \cdot 108 - 680 = 940$$

$$2. \quad a_n = 50 + (n-1) \cdot (-4) = -4n + 54$$

(別解)

$a_n \geq 0$ となる n の値を求める。

$$a_1 = 50, \quad a_{13} = -4 \cdot 13 + 54 = 2 \quad \text{だから}$$

$$a_n = -4n + 54 > 0 \quad \text{より} \quad n < 13.5$$

$$\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot (50 + 2) = 338$$

よって, 第 13 項までの和が最大になる。

また, このときの和は

$$\frac{13}{2}\{2 \cdot 50 + 12 \cdot (-4)\} = \frac{13}{2} \cdot 52 = 338$$

3.

$$(1) \quad \text{初項を } a \text{ とすると} \quad S_6 = \frac{a(3^6 - 1)}{3 - 1} = 364 \quad \text{より} \quad 364a = 364 \quad \therefore a = 1$$

$$\text{また} \quad S_n = \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

(2) 初項を a , 公比を r とすると

$$a + ar + ar^2 = 14 \cdots \textcircled{1}$$

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 = -364 \cdots \textcircled{2}$$

$$(a + ar + ar^2) + r^3(a + ar + ar^2) = -364$$

$$\text{として, ①を代入すると} \quad 14 + 14r^3 = -364$$

$$14r^3 = -378 \quad \therefore r^3 = -27$$

$$r \text{ は実数より} \quad r = -3$$

$$\textcircled{1} \text{に代入して} \quad a = 2 \quad \text{よって, 初項 } 2, \text{ 公比 } -3$$

4. 等比数列をなす3つの数を a , ar , ar^2 とすると

$$a + ar + ar^2 = 13 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a \cdot ar \cdot ar^2 = 27 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{より } a^3 r^3 = 27 \text{ だから } (ar)^3 = 3^3 \quad \therefore ar = 3$$

$$a = \frac{3}{r} \text{ として} \textcircled{1} \text{に代入} \quad \frac{3}{r} + 3 + 3r = 13$$

$$3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$(3r - 1)(r - 3) = 0 \quad \therefore r = \frac{1}{3}, 3$$

$$r = \frac{1}{3} \text{ のとき, } a = 9 \text{ で3つの数は } 9, 3, 1$$

$$r = 3 \text{ のとき, } a = 1 \text{ で3つの数は } 1, 3, 9$$

よって, 求める3数は 1, 3, 9

$$5. \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{k - (k+1)} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} &= \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{81} - \sqrt{80}) \\ &= -1 + \sqrt{81} = 9 - 1 = 8 \end{aligned}$$

6.

$$(1) \quad 2, 6, 10, 14, \dots, 190 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$8, 14, 20, \dots, 200 \quad \dots \textcircled{2}$$

とすると ①の公差は4, ②の公差は6

共通項の初項は14で, 公差は4と6の最小公倍数の12だから, 共通項を a_n とすると

$$\text{一般項は } a_n = 14 + (n-1) \cdot 12 = 12n + 2$$

$$12n + 2 \leq 190 \text{ より } n \leq 15.6\dots$$

$$\text{よって, 末項は } a_{15} = 12 \cdot 15 + 2 = 182$$

$$(2) \text{ 初項 } 14, \text{ 末項 } 182, \text{ 項数 } 15 \text{ だから } \frac{15(14 + 182)}{2} = 1470$$

7. 10 から 99 までの自然数だから

$$(1) \quad 3 \text{ の倍数は } 12, 15, 18, \dots, 99 \text{ である。}$$

初項 12, 公差 3 だから項数は

$$a_n = 12 + (n-1) \cdot 3 = 99 \text{ より } 3n = 90 \quad \therefore n = 30$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (12 + 99) = 1665$$

(2) 7で割ると2余る数は 16, 23, 30, ... となる。

これは、初項 16, 公差 7 の等差数列だから一般項は

$$a_n = 16 + (n-1) \cdot 7 = 7n + 9$$

$$7n + 9 < 100 \quad \text{より} \quad n < 13$$

これを満たす最大の自然数 n は 12

$$\text{よって} \quad S = \frac{1}{2} \cdot 12 \{ 2 \cdot 16 + (12-1) \cdot 7 \} = 654$$

(別解)

7で割ると2余る数は $7k+2$ と表せる。

$$9 < 7k+2 < 100 \quad \text{より} \quad 1 < k < 14$$

これより $2 \leq k \leq 13$ だから

初項は $k=2$ のとき 16

末項は $k=13$ のとき 93

項数は $13-1=12$

$$\text{よって} \quad S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (16+93) = 654$$

8.

(1) 第 k 項 a_k は $a_k = k(k+1)(k+2)$ だから、求める和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 + 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{4} n(n+1) \{ n(n+1) + 2(2n+1) + 4 \} = \frac{1}{4} n(n+1)(n^2 + 5n + 6) \\ &= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

(2) 第 k 項 a_k は $a_k = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-1} = \frac{1 \cdot (2^k - 1)}{2 - 1} = 2^k - 1$

だから、求める和を S_n とすると

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2^k - 1) = \sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{k=1}^n 1 = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n = 2^{n+1} - n - 2$$

9.

(1) 第 k 項 a_k は $a_k = k \{ n - (k - 1) \} = k(n - k + 1)$ と表せるから、和を S とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k(n - k + 1) = (n + 1) \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 = (n + 1) \cdot \frac{1}{2} n(n + 1) - \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1) \\ &= \frac{1}{6} n(n + 1) \{ 3(n + 1) - (2n + 1) \} = \frac{1}{6} n(n + 1)(n + 2) \end{aligned}$$

(2) 第 k 項 a_k は $a_k = \frac{1}{1 + 2 + 3 + \cdots + k} = \frac{1}{\frac{k(k + 1)}{2}} = \frac{2}{k(k + 1)}$

求める和を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k + 1)} = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1} \right) = 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1} \right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{n + 1} \right) = \frac{2n}{n + 1} \end{aligned}$$

10.

(1) 与えられた等式を①とおく。

(I) $n = 1$ のとき

$$(\text{左辺}) = 1, \quad (\text{右辺}) = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \right)^2 = 1 \quad \text{よって, } n = 1 \text{ のとき①が成り立つ。}$$

(II) $n = k$ のとき、①が成り立つと仮定すると

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left\{ \frac{1}{2} k(k + 1) \right\}^2 \cdots \text{②}$$

$n = k + 1$ のとき、①の左辺を②を用いて変形すると

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k + 1)^3 &= \left\{ \frac{1}{2} k(k + 1) \right\}^2 + (k + 1)^3 \\ &= \frac{1}{4} (k + 1)^2 \{ k^2 + 4(k + 1) \} = \frac{1}{4} (k + 1)^2 (k + 2)^2 = \left\{ \frac{1}{2} (k + 1)(k + 2) \right\}^2 \end{aligned}$$

したがって、 $n = k + 1$ のときにも成り立つ。

(I), (II) により、①はすべての自然数 n について成り立つ。

(2) 与えられた不等式を①とする。

(I) $n = 4$ のとき

(左辺) $= 2^4 = 16$, (右辺) $= 4^2 = 16$ よって, $n = 4$ のとき①が成り立つ。

(II) $n = k$ ($k \geq 5$) のとき, ①が成り立つと仮定すると

$$2^k \geq k^2 \quad \dots \textcircled{2} \quad \text{この両辺に 2 を掛けると} \quad 2^{k+1} \geq 2k^2$$

$$\text{ここで, } 2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1$$

$$= (k-1)^2 - 2 > 0 \quad (\because k \geq 4)$$

$$\text{だから} \quad 2k^2 > (k+1)^2$$

よって, $n = k+1$ のときも①が成り立つ。

$$\text{したがって} \quad 2^{k+1} > (k+1)^2$$

(I), (II) より, 4 以上のすべての自然数 n について①が成り立つ。

11.

$$(1) \quad a_1 = s_1 = 3 - 4 + 5 = 4$$

(2) $n \geq 2$ のとき

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

$$= 3n^2 - 4n + 5 - \{3(n-1)^2 - 4(n-1) + 5\}$$

$$= 3n^2 - 4n + 5 - (3n^2 - 6n + 3 - 4n + 4 + 5)$$

$$= 6n - 7$$

これは $n=1$ のとき $6-7=-1$

$$\text{よって, } \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = 6n - 7 \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

12.

$$(1) \quad a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha) \quad \text{より} \quad a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha$$

$$-2\alpha = -2 \quad \text{だから} \quad \alpha = 1$$

$$(2) \quad a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1) \quad \text{より} \quad b_n = a_n - 1 \quad \text{とおくと}$$

$$b_{n+1} = 3b_n, \quad b_1 = a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

数列 $\{b_n\}$ は初項 1, 公比 3 の等比数列だから

$$b_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

$$(3) \quad b_n = a_n - 1 \quad \text{より} \quad a_n - 1 = 3^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3^{n-1} + 1$$

13.

(1) 漸化式に $n = 1, 2, 3$ を代入すると

$$n = 1 \text{ のとき } 1 \cdot a_2 = 2a_1 + 1 = 3 \quad \therefore a_2 = 3$$

$$n = 2 \text{ のとき } 2 \cdot a_3 = 3a_2 + 1 = 3 \cdot 3 + 1 = 10 \quad \therefore a_3 = 5$$

$$n = 3 \text{ のとき } 3 \cdot a_4 = 4a_3 + 1 = 4 \cdot 5 + 1 = 21 \quad \therefore a_4 = 7$$

これより、一般項は $a_n = 2n - 1 \quad \dots \textcircled{1}$ と推定できる。

(2) (I) $n = 1$ のとき、 $\textcircled{1}$ は $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ となり成り立つ。

(II) $n = k$ のとき、 $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると $a_k = 2k - 1 \quad \dots \textcircled{2}$

$n = k + 1$ のとき、漸化式と $\textcircled{2}$ を用いて

$$ka_{k+1} = (k+1)a_k + 1 = (k+1)(2k-1) + 1 = 2k^2 + k$$

$$\therefore a_{k+1} = 2k + 1 = 2(k+1) - 1$$

よって、 $n = k + 1$ のときも成り立つ。

(I), (II) より、すべての自然数 n について $a_n = 2n - 1$ が成り立つ。