「流体力学」第８章　問題の解答

８－１ドリル問題

問題１　速度成分（u，v）が次の関数で表される 2 次元流れの渦度を求め，ポテンシャル流れであるか判定せよ。また，連続の式を満足するか確認せよ。

⑴　$u = x + y,\ v = x - y$

⑵　$u = x^3 - 8xy,\ v = -3x^2y + 4y^2$

略解：

⑴　渦度は次のように求められる。

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 1 - 1 = 0 \qquad \text{（答）}$$

渦度が恒等的にゼロであることからポテンシャル流れである。また，連続の式を満足することは次のように確認できる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + (-1) = 0 \qquad \text{（答）}$$

⑵　渦度は次のように求められる。

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - (-8x) = 6x\left(\frac{4}{3} - y\right)$$

渦度がゼロになるのは $x = 0$ もしくは $y = 4/3$ の場合のみである。恒等的にゼロにならないことからポテンシャル流れではない。また，連続の式を満足することは次のように確認できる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 8y + (-3x^2 + 8y) = 0 \qquad \text{（答）}$$

問題２　速度ポテンシャルが次の関数で与えられる 2 次元ポテンシャル流れの速度成分および流線の関数を求めよ。積分定数は C とせよ。

⑴　$\phi = Ax + By$

⑵　$\phi = xy$

⑶　$\phi = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$

略解：

⑴　速度ポテンシャルの定義（式 8-18）から流速の成分は次のように求められる。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = A,\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = B \qquad \text{（答）}$$

式 8－24 より流線の関数は次のように求められる。

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}$$

$$y = \frac{B}{A}x + C \qquad （答）$$

⑵　速度ポテンシャルの定義（式 8－18）から流速の成分は次のように求められる。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = y,\ \ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = x \qquad （答）$$

流線の関数は式 8-24 から次のように求められる。

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$$

$$xdx = ydy$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = C$$

$$x^2 - y^2 = C \qquad （答）$$

⑶　速度ポテンシャルの定義から流速の成分は次のように求められる。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2},\ \ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad （答）$$

流線の関数は次のように求められる。

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$\frac{dx}{\frac{x}{x^2+y^2}} = \frac{dy}{\frac{y}{x^2+y^2}}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\log x = \log y + C$$

$$\log \frac{y}{x} = C$$

$$\frac{y}{x} = C$$

$$y = Cx \qquad （答）$$

問題３　流れ関数が次の関数で与えられる２次元ポテンシャル流れの速度成分および等ポテンシャル線を求めよ。積分定数は C とせよ。

⑴　$\psi = -Ax + By$

⑵　$\psi = -2xy$

⑶　$\psi = \dfrac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$

略解：

⑴　$\psi = -Ax + By$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = B,\ \ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = A \qquad （答）$$

速度ポテンシャルの微分

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy \\ &= udx + vdy \\ &= Bdx + Ady \end{aligned}$$

等ポテンシャル線は$d\phi = 0$ をみたすので

$$Bdx + Ady = 0$$

これを積分すると次の関数が得られる。

$$Bx + Ay = C \qquad （答）$$

⑵　$\psi = -2xy$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2x,\ \ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2y \qquad （答）$$

$$\begin{aligned} d\phi &= udx + vdy \\ &= -2xdx + 2ydy \end{aligned}$$

$d\phi = 0$として積分すると等ポテンシャル線の関数が得られる。

$$-2xdx + 2ydy = 0$$

$$-x^2 + y^2 = C \qquad （答）$$

⑶　$\psi = \dfrac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$

$$u = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2 + y^2}2y = \frac{y}{x^2 + y^2} \qquad （答）$$

$$v = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2 + y^2}2x = -\frac{x}{x^2 + y^2} \qquad （答）$$

$$\begin{aligned} d\phi &= u\,dx + v\,dy \\ &= \frac{y}{x^2 + y^2}\,dx - \frac{x}{x^2 + y^2}dy \end{aligned}$$

$d\phi = 0$ とする

$$\frac{y}{x^2 + y^2}dx - \frac{x}{x^2 + y^2}dy = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$$

積分すると

$$\log x - \log\ y = C$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = C \qquad \frac{x}{y} = e^{C}$$

等ポテンシャル線の関数は次のようになる。

$$y = \frac{1}{e^{C}}x = kx \qquad \left(k = \frac{1}{e^{C}} = 定数\right)$$ （答）

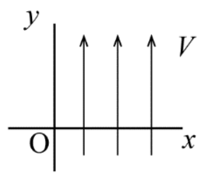
問題４　次の複素速度ポテンシャルで表される流れがどのような流れであるか説明せよ。U，V および α は定数である。

⑴　$W(z) = -iVz$

⑵　$W(z) = (U - iV)z$

⑶　$W(z) = Ue^{-i\alpha}z$

略解：



⑴　$W(z) = -iVz$

$z = x + iy$ を代入する。

$W(z) = -iV(x + iy) = Vy - iVx$

速度ポテンシャルと流れ関数は次のようになる。

$\phi = Vy$，$\psi = -Vx$

流速の成分（u，v）を求めると次のようになる。

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0,\ \ v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = V$$

よって，この複素速度ポテンシャルは y 軸と平行に正方向に向かう流れを表している。　　（答）

⑵　$W(z) = (U - iV)z$

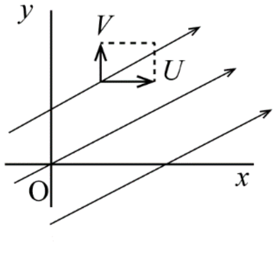
$z = x + iy$ を代入する。

$W(z) = (U - iV)(x + iy) = (Ux + Vy) + i(Uy - Vx)$

$\phi = Ux + Vy$，$\psi = Uy - Vx$

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = U,\ \ v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = V$$

よってこの複素速度ポンテンシャルは，x 方向に一様に U の速度，y 方向に一様に V の速度をもつ流れとなる。（傾きが $\frac{V}{U}$ の一次関数）　　（答）



⑶　$W(z) = Ue^{-i\alpha}z$

$z = re^{i\theta}$ を代入する。

$$W(z) = Ue^{-i\alpha}re^{i\theta} = Ur^{i(\theta-\alpha)}$$

$$= Ur\{\cos(\theta-\alpha) + i\sin(\theta-\alpha)\}$$

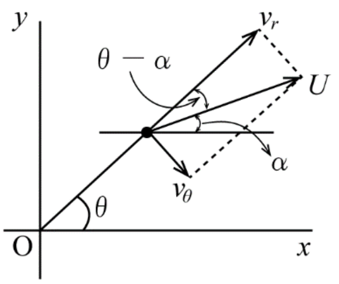
$$\phi = Ur\cos(\theta-\alpha),\ \psi = Ur\sin(\theta-\alpha)$$

流速の成分$(v_r,\ v_\theta)$を求める。

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = U\cos(\theta-\alpha)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -U\sin(\theta-\alpha)$$

これを図示すると次のようになる。



これより，x 軸とのなす角が α の方向の一様な流れであることが分かる。（答）

問題５　図 8－13 の円柱まわりのポテンシャル流れについて，以下の問いに答えよ。

⑴　式 8－59 で表される速度ポテンシャルと流れ関数を直角座標で書き換えるとそれぞれ次のように表されることを示せ。

$$\phi = Ux\left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$\psi = Uy\left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2}\right)$$

⑵　y 軸上の流速 u の分布の関数を求めよ。また，y 軸上の流速が $1.25U$ となる点の座標を求めよ。

⑶　x 軸上の流速 u の分布の関数を求めよ。また，x 軸上の流速が $0.75U$ となる点の座標を求めよ。

略解：

⑴　$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，$r = \sqrt{x^2+y^2}$ を代入する。

$$\phi = U\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta = U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)r\cos\theta$$

$$= U\left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2}\right)x \qquad （答）$$

$$\psi = U\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)r\sin\theta$$

$$= U\left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2}\right)y \qquad （答）$$

⑵ $\phi = U\left(x + \dfrac{R^2 x}{x^2 + y^2}\right)$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = U\left\{1 + \frac{R^2(x^2 + y^2) - R^2 x \times 2x}{(x^2 + y^2)^2}\right\}$$

$$= U\left\{1 - \frac{R^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}\right\}$$

$x = 0$ とすると y 軸上の流速分布が得られる。

$$u = U\left(1 + \frac{R^2}{y^2}\right)$$ （答）

$u = 1.25U$ になる点は次のように求められる。

$$1.25U = U\left(1 + \frac{R^2}{y^2}\right)$$

$$\frac{R^2}{y^2} = 0.25 = \frac{1}{4}$$

$$y^2 = 4R^2$$

$$y = \pm 2R$$

よって，求める点の座標は（0，$2R$），（0，$-2R$）　（答）

⑶ $y = 0$ とすると x 軸上の流速分布が得られる。

$$u = U\left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right)$$ （答）

$u = 0.75U$ を代入すると

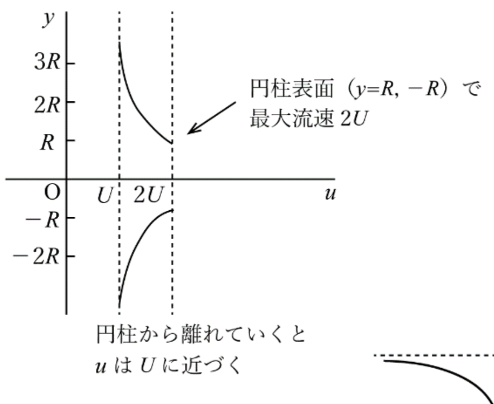
$$0.75U = U\left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right)$$

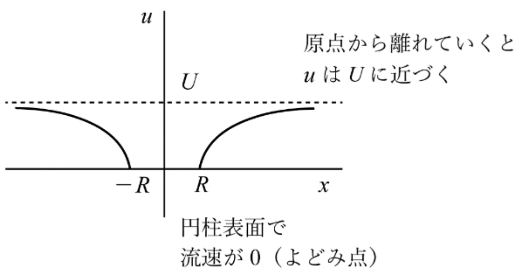
$$\frac{R^2}{x^2} = 0.25U = \frac{1}{4}U$$

$$x^2 = 4R^2$$

$$x = \pm 2R$$

よって，求める点の座標は（$2R$，0），（$-2R$，0）　（答）





問題６　次の複素速度ポテンシャルで表される流れ場で$z=3+4i$ における流速が 10 である。以下の問いに答えよ。

$$W(z)=Az^2$$

⑴　定数 A の値を求めよ。

⑵　$z=6+8i$における流速を求めよ。

⑶　$z=6+8i$の点を通る流線の関数を求めよ。

略解：

⑴　$z=x+iy$ を代入する。

$$W(z)=Az^2=A(x+iy)^2=A(x^2-2xyi-y^2)$$
$$=A\{(x^2-y^2)+i(-2xy)\}$$

速度ポテンシャル ϕ を流れ関数 ψ は次のようになる。

$$\phi=A(x^2-y^2) \qquad \psi=-2xy$$

流速の成分は次のようになる。

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}=2Ax \qquad v=\frac{\partial\phi}{\partial y}=-2Ay$$

$z=3+4i$ を通るので，$x=3$，$y=4$ を代入すると

この点における流速の成分が求められる。

$$u=6A,\ v=-8a$$

流速は$q=\sqrt{u^2+v^2}=10$ なので

$$\sqrt{(6A)^2+(-8A)^2}=\sqrt{100A^2}=10A=10$$

よって　$A=1$ が得られる。　　　　（答）

⑵　$z=6+8i$ における流速の成分は

$$u=12,\ v=-16$$

よって　流速は次のように求められる。

$$q=\sqrt{u^2+v^2}=\sqrt{12^2+(-16)^2}$$
$$=\sqrt{144+256}=\sqrt{400}=20$$　　　　（答）

⑶　流線の関数は C を定数として次のように表わされる。

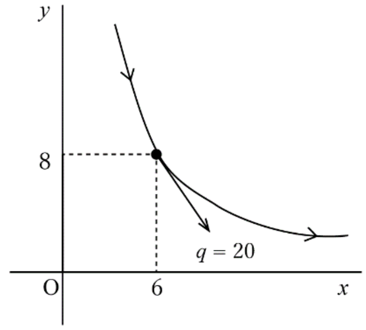
$$\psi=-2xy=C$$

$z=6+8i$ を通るので，C を求めると

$$C=-2\times6\times8=-96$$
$$-2xy=-96$$

よって流線の関数は次のようになる。

$$y=\frac{48}{x}$$　　　　（答）



問題７　複素速度ポテンシャルが次の式で表される流れについて，以下の問いに答えよ。

$$W(z) = 5(z - 3 + 4i)^2$$

⑴　原点における流速の成分（u_0, v_0）および流速ベクトルの大きさ q_0 を求めよ。

⑵　よどみ点の座標を求めよ。

⑶　$\psi = 0$，$\psi = -120$，$\psi = -240$の流線を描け。

⑷　原点における圧力を p_0，座標が$z = -5 - i$ の A 点における圧力を p_A とする。2 点間の圧力差 p_0 - p_A を求めよ。流体の密度はρとする。

略解：

⑴　$z = x + iy$ を代入して，式を整理すると次のようになる。

$$W(z) = 5(z - 3 + 4i)^2 = 5(z^2 - 6z - 7 + 8zi - 24i)$$

$$= 5\{(x + iy)^2 - 6(x + iy) - 7 - 8(x + iy)i - 24i\}$$

$$= 5\{(x^2 - y^2 - 6x - 7 - 8y) + i(2xy - 6y + 8x - 24)\}$$

速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ は次のようになる。

$$\phi = 5(x^2 - y^2 - 6x - 8y - 7)$$

$$\psi = 5(2xy - 6y + 8x - 24)$$

流速の成分は次のように求められる。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 5(2x - 6) = 10x - 30$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 5(-2y - 8) = -10y - 40$$

原点（0，0）における流速の成分と流速ベクトルの大きさは次のように求められる。

$u_0 = -30$，$v_0 = -40$　　　（答）

$q_0 = \sqrt{{u_0}^2 + {v_0}^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50$　　　（答）

⑵　よどみ点では $u = v = 0$ なので，その座標は次のように求められる。

$u = 10x - 30 = 0$　　　$v = -10y - 40 = 0$

$x = 3$　　　$y = -4$

$(3,\ -4)$ がよどみ点　　　（答）

⑶　流線の関数は次のようになる。

$\psi = 5(2xy - 6y + 8x - 24) = C$　（定数）

$\psi = 0$ とすると

$$\psi = 5\{2y(x-3) + 8(x-3)\}$$
$$= 5\{2(x-3)(y+4)\}$$
$$= 10(y+4)(x-3) = 0$$

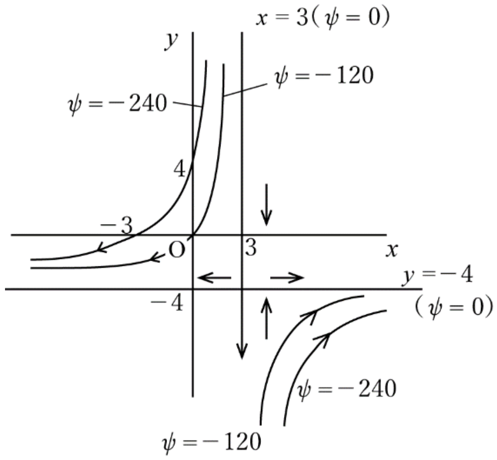
$x = 3,\ y = -4$　すなわち　$x = 3,\ y = -4$　が流線となる。

$\psi = -120$ とすると

$$10(y+4)(x-3) = -120$$
$$(y+4)(x-3) = -12$$
$$y = -4 - \frac{12}{x-3}$$

$\psi = -240$ とすると

$$10(y+4)(x-3) = -240$$
$$y = -4 - \frac{24}{x-3}$$

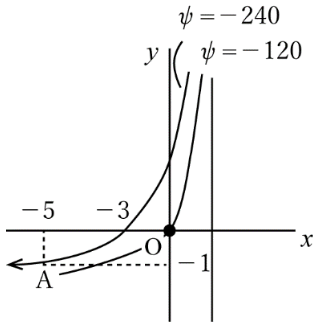


これらの流線を図示すると図のようになる。（答）

⑷　流線の関数から

$\psi = -120$ の流線が原点を通り

$z = -5 - i$ の A 点は$\psi = -240$ の流線上にある。



原点における流速は⑴で求めている通り

$$q_0 = 50$$

$z = -5 - i$ における流速の成分は

$$u_A = 10x - 30 = -50 - 30 = -80$$
$$v_A = -10y - 40 = 10 - 40 = -30$$

よって流速ベクトルの大きさは次のようになる。

$$q_A = \sqrt{u_A{}^2 + v_A{}^2} = \sqrt{6400 + 900} = \sqrt{7300}$$

ポテンシャルエネルギーは無視できるとして，原点と A 点との間でベルヌーイの式を書くと次のようになる。

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{q_0{}^2}{2} = \frac{p_A}{\rho} + \frac{q_A{}^2}{2}$$

$$p_0 - p_A = \frac{\rho}{2}(q_A{}^2 - q_0{}^2)$$

$$= \frac{\rho}{2}(7300 - 2500)$$

$$= \frac{\rho}{2} \times 4800 = 2400\rho$$ （答）

問題８　図 8－13 の円柱まわりのポテンシャル流れについて，以下の問いに答えよ。流体の密度はρとする。ポテンシャルΩ は考慮しなくてよい。

⑴　円柱表面上の流速の最大値と最小値の差を求めよ。

⑵　円柱表面上の圧力の最大値と最小値の差を求めよ。

⑶　円柱まわりに時計まわりの循環 Γを与える。$\Gamma = 2\pi RU$ のときのよどみ点の座標を求めよ。

⑷　⑶のとき，$(r,\ \theta) = (R,\ \pi/2)$ および$(r,\ \theta) = (R,\ -\pi/2)$ の２点における流速を求めよ。

⑸　⑷の２点間の圧力差を求めよ。

略解：

⑴　円柱表面上の流速は極形式で式 8－62 と式 8－63 で表されるので，$r = R$ を代入すると次のように求められる。

$$v_r = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta = 0$$

$$v_\theta = -U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta = -2U\sin\theta$$

半径方向の速度はゼロであり，周方向の速度のみ反時計回りに生じる。$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ であることを考慮すると，$\sin\theta = 1$ および$\sin\theta = -1$ の 1 で流速は最大の２U となる。円柱表面に現れるよどみ点では流速がゼロになるので，これが流速の最小値となる。よって，流速の最大値と最小値の差は $2U$ となる。

（答）

⑵　ベルヌーイの式から，流速が最大の点で圧力が最小になり，流速が最小の点で圧力が最大となる。圧力の最小値 $p_{\min}$ は次のように求められる。

$$p_0 + \frac{\rho U^2}{2} = p_{\min} + \frac{\rho(2U)^2}{2}$$

$$p_{\min} = p_0 + \frac{\rho U^2}{2} - \frac{4\rho U^2}{2} = p_0 - \frac{3\rho U^2}{2}$$

同様に圧力の最大値 $p_{\max}$ は次のように求められる。

$$p_0 + \frac{\rho U^2}{2} = p_{\max} + \frac{\rho(0)^2}{2}$$

$$p_{\max} = p_0 + \frac{\rho U^2}{2}$$

以上より，圧力の最大値と最小値の差は次のように求められる。

$$p_{\max} - p_{\min} = \left(p_0 + \frac{\rho U^2}{2}\right) - \left(p_0 - \frac{3\rho U^2}{2}\right)$$

$$= \frac{\rho U^2}{2} + \frac{3\rho U^2}{2} = \frac{4\rho U^2}{2} = 2\rho U^2$$ （答）

⑶　循環を与えた場合の円柱表面上の流速の成分は式 8－72 で$r=R$ とすることで次のように求められる。

$$v_r = U\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta = 0$$

$$v_\theta = -U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} = -2U\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

よどみ点においては，周方向成分もゼロとなることから

$$\sin\theta = -\frac{\Gamma}{4\pi RU}$$

の関係が得られる。ここで，$\Gamma = 2\pi RU$ とすると，

$$\sin\theta = -\frac{\Gamma}{4\pi RU} = -\frac{2\pi RU}{4\pi RU} = -\frac{1}{2}$$

となり，この条件を満たす角度を求めると２つのよどみ点の座標が次のように得られる。

$$(r,\theta) = \left(R,-\frac{\pi}{6}\right),\ \left(R,-\frac{5\pi}{6}\right) \qquad \text{（答）}$$

⑷　$(r,\ \theta) = (R,\ \pi/2)$における流速は次のように求められる。

$$v_r = U\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta = 0 \qquad \text{（答）}$$

$$v_\theta = -U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

$$= -2U\sin\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi RU}{2\pi R} = -2U - U = -3U \qquad \text{（答）}$$

$(r,\ \theta) = (R,\ -\pi/2)$における流速は次のように求められる。

$$v_r = U\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta = 0 \qquad \text{（答）}$$

$$v_\theta = -U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

$$= -2U\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2\pi RU}{2\pi R} = 2U - U = U \qquad \text{（答）}$$

以上の結果から，循環により円柱の上面と下面に流速の差が生じることがわかる。

⑸　$(r,\ \theta) = (R,\ \pi/2)$ における圧力はベルヌーイの式から次のように求められる。

$$p_0 + \frac{\rho U^2}{2} = p + \frac{\rho(3U)^2}{2}$$

$$p = p_0 + \frac{\rho U^2}{2} - \frac{9\rho U^2}{2} = p_0 - \frac{8\rho U^2}{2} = p_0 - 4\rho U^2$$

$(r,\ \theta) = (R,\ -\pi/2)$ における圧力も同様に求められる。

$$p_0 + \frac{\rho U^2}{2} = p + \frac{\rho U^2}{2}$$

$$p = p_0 + \frac{\rho U^2}{2} - \frac{\rho U^2}{2} = p_0$$

以上の結果から，円柱の上面と下面の 2 点間で$4\rho U^2$の圧力の差が生じることがわかる。これが揚力発生の要因である。　（答）

８－２　ドリル問題

問題１　図 8－18 のような平行平板間のポアズイユ流れの速度分布は次のように表される。

$$u = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(hy - y^2)$$

この流れについて，流路中央で$(y = h/2)$流速 u が最大となることを示し，その最大流速u_{max}を求めよ。また，流路中央でのせん断応力τ_0と平板上$(y = 0)$でのせん断応力τ_wをそれぞれ求めよ。

略解：速度分布は二次関数であるので，次のように変形すると $y = h/2$ で流速が最大になることがわかる。

$$u = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left\{-\left(y - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{4}\right\}$$　（答）

このときの最大流速は次のようになる。

$$u_{max} = -\frac{h^2}{8\mu}\frac{dp}{dx}$$

また，せん断応力の定義から流路中央ならびに平板上でのせん断応力を求めると次のようになる。

$$\frac{du}{dy} = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(h - 2y)$$　を用いて

$$\tau_0 = \mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=h/2} = -\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}\left(h - 2\times\frac{h}{2}\right) = 0$$　（答）

$$\tau_w = \mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = -\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}(h - 2\times 0) = -\frac{h}{2}\frac{dp}{dx}$$　（答）

この結果から，せん断応力は流路中央でゼロになり，平板表面上で最大の値となる。

問題２　図 8－18 のようなクエット流れの速度分布が直線状になることを示せ。また，せん断応力の分布を求めよ。

略解：ナビエ・ストークス方程式（式 8－78）を二次元定常流れを仮定し簡略化すると，クエット流れを記述する x 方向の運動方程式は次の通りに整理できる。

ここで，$\frac{\partial u}{\partial t}$，$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$，$v$，$w$，$X$ などはゼロであり，圧力勾配によって流れないので$\frac{\partial p}{\partial x}=0$である。

$$\mu\frac{d^2u}{dx^2}=0$$

これを積分すると速度分布が決定される。ただし，C_1 と C_2 は積分定数である。

$$\frac{d^2u}{dy^2}=0\rightarrow\frac{du}{dy}=C_1\rightarrow u=C_1y+C_2$$

ここで境界条件として$y=0$ で$u=0$，$y=h$ で $u=U$となる条件を与えると積分定数を決定することができる。

$$C_1=\frac{U}{h},\quad C_2=0$$

よって，クエット流れの速度分布は次のようになる。

$$u=\frac{U}{h}y\qquad（答）$$

せん断応力の分布については，定義から次のように計算することができる。

$$\tau=\mu\frac{du}{dy}=\frac{\mu U}{h}\qquad（答）$$

この結果からわかるように,クエット流れではせん断応力は流路内で一定である。

問題３　流速 U の一様な流れの中におかれた平板上の流れ（層流）について，壁面せん断応力が次のように局所レイノルズ数の関数となることを示せ。

$$\tau_{\mathrm{w}}=\frac{3\mu U\sqrt{Re_x}}{9.82x}$$

略解：層流の速度分布は式 8－84 より次の通りである。

$$\frac{u}{U}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

これより速度勾配を計算すると次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3}{2}\frac{U}{\delta}\left\{1-\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right\}$$

境界層厚さは局所レイノルズ数で次式 8－86 のように表される。

$$\delta=\frac{4.91x}{\sqrt{Re_x}}$$

以上より，壁面せん断応力を求めると次のようになる。

$$\tau_{\mathrm{w}} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{3}{2}\frac{\mu U}{\delta} = \frac{3}{2}\mu U \frac{\sqrt{Re_x}}{4.91x} = \frac{3\mu U\sqrt{Re_x}}{9.82x}$$

問題４　流速 $U = 2.0\mathrm{m/s}$ の一様な水の流れの中に流れに平行となるように長さ 2m, 幅 1m の平板が置かれている。平板の先端から$x = 1\mathrm{m}$の位置における境界層厚さを求めよ。また，摩擦抗力係数を求め，平板の上面に作用する摩擦抗力を求めよ。水の密度は $\rho = 1000\mathrm{kg/m^3}$，粘度は$\mu = 1.0 \times 10^{-3}\mathrm{Pa \cdot s}$ とする。

略解：$x = 1\mathrm{m}$ の位置における局所レイノルズ数を計算する。

$$Re_x = \frac{Ux}{\nu} = \frac{\rho Ux}{\mu} = \frac{1000 \times 2.0 \times 1.0}{1.0 \times 10^{-3}} = 2.0 \times 10^6$$

これより，$Re \geq (3 \sim 5) \times 10^5$（8－2－4 項参照）であるから，流れは乱流であると判定できる。よって，$x = 1\mathrm{m}$ の位置における境界層厚さは式 8－87 より次のように計算できる。

$$\delta = 0.37x\left(\frac{1}{Re_x}\right)^{1/5} = 0.37 \times 1.0 \times \left(\frac{1}{2.0 \times 10^6}\right)^{0.2} = 0.0203\mathrm{m} = 20.3\mathrm{mm} \qquad （答）$$

平板の長さを代表長さとするレイノルズ数を求めると次のようになる。

$$Re_L = \frac{UL}{\nu} = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{1000 \times 2.0 \times 2.0}{1.0 \times 10^{-3}} = 4.0 \times 10^6$$

よって，摩擦抗力係数は式 8－93 より次のように求められる。

$$C_{\mathrm{f}} = 0.074\left(\frac{1}{Re_L}\right)^{1/5} = 0.074 \times \left(\frac{1}{4.0 \times 10^6}\right)^{0.2} = 3.5 \times 10^{-3} \qquad （答）$$

これより，摩擦抗力は次のように求められる。

$$D_{\mathrm{f}} = C_{\mathrm{f}}\frac{\rho U^2 L}{2}H = 3.5 \times 10^{-3} \times \frac{1000 \times 2.0^2 \times 2.0}{2} \times 1.0 = 14.0\mathrm{N} \qquad （答）$$

問題５　縦$L = 1.8\mathrm{m}$, 横$H = 1.0\mathrm{m}$の長方形の太陽電池パネルを水平に搭載したソーラーカーがある。走行速度が$U = 36\mathrm{km/h}$のとき太陽電池パネルに作用する摩擦抗力を計算せよ。ただし，太陽電池パネルは平板と仮定し，パネルの縦方向が車の進行方向と一致しているとする。空気の密度は$\rho = 1.2\mathrm{kg/m^3}$，粘度は$\mu = 18 \times 10^{-6}\mathrm{Pa \cdot s}$ とする。

略解：パネルの長さを代表長さとするレイノルズ数を計算する。

$$Re_L = \frac{UL}{\nu} = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{1.2 \times \left(36 \times \frac{1000}{3600}\right) \times 1.8}{18 \times 10^{-6}} = 1.2 \times 10^6$$

前述のドリル問題４と同様に乱流であることが分かるので，摩擦抗力係数は式 8－93 より次のようになる。

$$C_{\mathrm{f}} = 0.074\left(\frac{1}{Re_L}\right)^{1/5} = 0.074 \times \left(\frac{1}{1.2 \times 10^6}\right)^{0.2} = 4.5 \times 10^{-3}$$

これより，摩擦抗力は次のように求められる。

$$D_{\mathrm{f}} = C_{\mathrm{f}} \frac{\rho U^2 L}{2} H = 4.5 \times 10^{-3} \times \frac{1.2 \times 10^2 \times 1.8}{2} \times 1.0 = 0.49\mathrm{N} \qquad \text{（答）}$$

問題６　体長 $L_1 = 50\mathrm{cm}$の魚が遊泳するときの魚体まわりの水流の様子を調べるために，縮小模型と小型水槽を用いて可視化する実験を計画している。模型の体長を $L_2 = 10\mathrm{cm}$ とするとき，魚が$U_1 = 2.0\mathrm{m/s}$で泳ぐ状況を実験で再現するための水流の速度U_2を求めよ。また，同様の可視化実験を実寸法の模型を製作して風洞内の空気流で行う場合，空気流の速度をいくらにすればよいか計算せよ。

ただし，空気の密度は $\rho_{\mathrm{a}} = 1.2\mathrm{kg/m^3}$，粘度は $\mu_{\mathrm{a}} = 18 \times 10^{-6}\mathrm{Pa \cdot s}$,
水の密度は$\rho_{\mathrm{w}} = 1000\mathrm{kg/m^3}$，粘度は $\mu_{\mathrm{w}} = 1.0 \times 10^{-3}\mathrm{Pa \cdot s}$ とする。

略解：実際の魚のレイノルズ数 Re_1 と模型のレイノルズ数 Re_2 を計算する。

$$Re_1 = \frac{\rho_{\mathrm{w}} U_1 L_1}{\mu_{\mathrm{w}}} = \frac{1000 \times 2.0 \times 0.5}{1.0 \times 10^{-3}} = 1.0 \times 10^6$$

$$Re_2 = \frac{\rho_{\mathrm{w}} U_2 L_2}{\mu_{\mathrm{w}}} = \frac{1000 \times U_2 \times 0.1}{1.0 \times 10^{-3}} = 0.1 \times 10^6 U_2$$

両者が一致すればよいので，水槽の水流の速度は次のように求められる。

$$U_2 = \frac{1.0 \times 10^6}{0.1 \times 10^6} = 10.0\mathrm{m/s} \qquad \text{（答）}$$

空気流の実験の場合のレイノルズ数は次のようになる。

$$Re_2{}' = \frac{\rho_a U_2{}' L_2{}'}{\mu_{\mathrm{a}}} = \frac{1.2 \times U_2{}' \times 0.5}{18 \times 10^{-6}} = \frac{10}{3} \times 10^4 U_2{}'$$

よって，空気の流速は次のように求められる。

$$U_2{}' = \frac{1.0 \times 10^6}{10/3 \times 10^4} = 30.0\mathrm{m/s} \qquad \text{（答）}$$

問題７　トンボの翼の流体力学的な特徴を調べるための実験を計画している。翼の断面形状と相似な拡大模型を製作してグリセリンを用いた流れの可視化を行う。断面形状の長さが実物では $L_1 = 4\mathrm{mm}$，模型では $L_2 = 10\mathrm{cm}$ とする。トンボの飛翔速度が$U_1 = 0.4\mathrm{m/s}$の場合を再現するためにはグリセリンの流速 U_2 をいくらに設定すれば良いか計算せよ。ただし，空気の動粘度を$\nu_{\mathrm{a}} = 16 \times 10^{-6}\mathrm{m^2/s}$，グリセリンの動粘度は$\nu_{\mathrm{g}} = 2 \times 10^{-3}\mathrm{m^2/s}$とする。

略解：実物のレイノルズ数 Re_1 と拡大模型のレイノルズ数 Re_2 を求めると次のようになる。

$$Re_1 = \frac{U_1 L_1}{\nu_{\mathrm{a}}} = \frac{0.4 \times 0.004}{16 \times 10^{-6}} = 100$$

$$Re_2 = \frac{U_2 L_2}{\nu_{\mathrm{g}}} = \frac{U_2 \times 0.1}{2 \times 10^{-3}} = 50 U_2$$

両者が等しくなればよいので，グリセリンの流速を次のように決定することができる。

$$U_2 = \frac{100}{50} = 2\mathrm{m/s} \qquad \text{（答）}$$

問題８　流れ方向に断面積が増加する拡大流路では,流路壁面からのはく離が生じやすい。この理由を説明せよ。

略解：拡大流路では，下流に進むにしたがって速度が減少する流れとなる。同時に圧力は上昇する傾向を示す。すなわち，流れ方向に圧力が増加する。壁面近傍では粘性の影響で運動量が減少していることから，圧力増加に抗することができずにはく離が生じてしまう。　　　（答）

８章　演習問題

１．流れ関数が次の式で表される 2 次元ポテンシャル流れについて考える。

$$\psi = 2xy$$

A 点の座標を $(x_A, y_A) = (0, 1)$ とし，この点での圧力 $p_A = 10^5\mathrm{Pa}$ をとする。また，流体の密度を $\rho = 10^3\mathrm{kg/m^3}$ とする。以下の問いに答えよ。

⑴　流速の成分 (u, v) を求めよ。また，座標が $(x_B, y_B) = (1, 1)$ の B 点における流速の成分 (u_B, v_B) の値を求めよ。

⑵　よどみ点の座標 (x_0, y_0) を求めよ。

⑶　$\psi = C$ （C は定数）とし，$C = 0, 2, 4, 8$ の 4 ケースについて流線の概形を $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の範囲で図示せよ。その際，⑴の B 点における流速のベクトルと⑵のよどみ点を記入せよ。また，この図からこの流れ場で流体がどのように運動するのか説明せよ。

⑷　座標が $(x_C, y_C) = (2, 2)$ の C 点における圧力 p_c を求めよ。体積力は考慮しなくてよい。流速の単位を m/s とする。

略解：

⑴　流速の成分 (u, v) は次のように求められる。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x \qquad \text{（答）}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = -2y \qquad \text{（答）}$$

B 点における流速の成分は次のように求められる。

$$u_B = 2x_B = 2 \qquad \text{（答）}$$

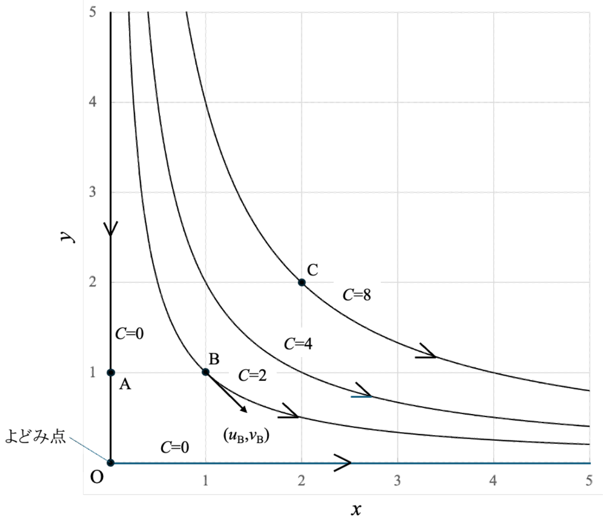
$$v_B = -2y_B = -2 \qquad \text{（答）}$$

⑵　よどみ点では流速がゼロになるので $u = v = 0$ となる点を求めればよい。よって，この流れのよどみ点の座標は次のように求められる。

$$x_0 = \frac{u}{2} = \frac{0}{2} = 0 \qquad \text{（答）}$$

$$y_0 = -\frac{v}{2} = -\frac{0}{2} = 0 \qquad \text{（答）}$$

⑶　$C = 0$ の流線は $x = 0$ と $y = 0$ となる。$C = 2, 4, 8$ については反比例のグラフとなり，以下のように図示することができる。$C = 0$の流線を固体壁面に沿う流れと考えると 90° の角を通過する流れを表していると考えることができる。流速の成分が $x > 0$ ，$y > 0$の範囲では，$u > 0$，$v < 0$ となることから，流れの向きは図中の矢印の方向になる。（答）



⑷　A 点 $(x_A, y_A) = (0, 1)$ では，流速の成分が次のように求められる。

$$u_A = 2x_A = 0$$

$$v_A = -2y_A = -2$$

これより，流速ベクトルの大きさ q_A は次のように求められる。

$$q_A = \sqrt{{u_A}^2 + {v_A}^2} = \sqrt{0 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

C 点$(x_C, y_C) = (2, 2)$ における流速の成分 (u_C, v_C) は次のように求められる。

$$u_C = 2x_C = 4$$

$$v_C = -2y_C = -4$$

よって，流速ベクトルの大きさ q_C は次のように求められる。

$$q_C = \sqrt{{u_C}^2 + {v_C}^2} = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$$

A 点と C 点は同一の流線上にないが，ポテンシャル流れであることから，A 点と C 点との間にベルヌーイの式を適用することができる。両点における力学的エネルギーが等しいことから次の関係が得られる。

$$p_A + \frac{\rho {q_A}^2}{2} = p_c + \frac{\rho {q_c}^2}{2}$$

これより，C 点の圧力 p_C は次のように求められる。

$$p_C = p_A + \frac{\rho {q_A}^2}{2} - \frac{\rho {q_c}^2}{2} = 10^5 + \frac{10^3 \times 4}{2} - \frac{10^3 \times 32}{2}$$
$$= 10^5 - 0.14 \times 10^5 = 0.86 \times 10^5 \mathrm{Pa} \qquad （答）$$

２．次の複素速度ポテンシャルで表される流れの流れ関数と速度ポテンシャルを求め，どのような流れであるか説明せよ。a は正の定数である。

$$W(z)=\frac{a}{z}$$

略解：$z=x+iy$ を代入すると

$$W(z)=\frac{a}{x+iy}=\frac{a(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{ax-iay}{x^2+y^2}=\frac{ax}{x^2+y^2}-i\frac{ay}{x^2+y^2}$$

となり，速度ポテンシャルと流れ関数が次のように求められる。

$$\phi=\frac{ax}{x^2+y^2}$$　（答）

$$\psi=-\frac{ay}{x^2+y^2}$$　（答）

流線の方程式は，C を定数として $\psi=C$ と表されることから，

$$-\frac{ay}{x^2+y^2}=C$$

であり，これを変形すると次のようになる。

$$x^2+\left(y+\frac{a}{2C}\right)^2=\left(\frac{a}{2C}\right)^2$$　（答）

これは，中心の座標が $\left(0,\ -a/2C\right)$ で半径が $a/2C$ の円を表しており，流線は C を正負に変化させることにより，常に原点で実軸に接する円群となる。

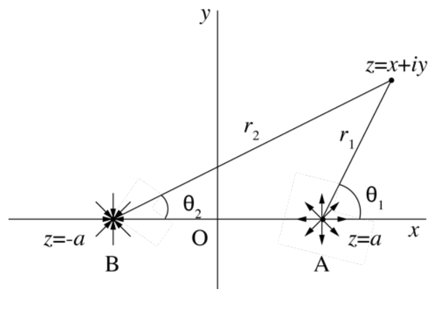
同様に等ポテンシャル線の方程式は，D を定数として $\phi=D$ と次のように表され，中心の座標が $\left(a/2D,\ 0\right)$ で半径が $a/2D$ の円群になることがわかる。

$$\left(x-\frac{a}{2D}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2D}\right)^2$$　（答）

この流れは本文中の図 8－12 になる。

３．図に示すように，複素平面の A 点（$z=a$）と B 点（$z=-a$）にそれぞれ以下の複素速度ポテンシャルの吹き出し $W_1(z)$ と吸い込み $W_2(z)$ をおき，角度 θ_1 と θ_2 および動径 r_1 と r_2 を定める。２つの複素速度ポテンシャルを重ね合わせた流れ場の速度ポテンシャルと流れ関数を求めよ。また，流線と等ポテンシャル線がどのような形状になるか説明せよ。

$$W_1(z)=m\log\,(z-a)$$
$$W_2(z)=-m\log\,(z+a)$$



略解：

A 点と B 点を基準として極座標（r_1，θ_1）と（r_2，θ_2）を定め，複素平面上の座標 z を次のよう表す。

$$z = r_1 e^{i\theta_1} + a = r_2 e^{i\theta_2} - a$$

これを利用して複素速度ポテンシャルを次のように書き換える。

$$W_1(z) = m\log\left(r_1 e^{i\theta_1}\right)$$

$$W_2(z) = -m\log\left(r_2 e^{i\theta_2}\right)$$

両者を重ね合わせた複素速度ポテンシャルは次のように表される。

$$W(z) = W_1(z) + W_2(z) = m\log\left(r_1 e^{i\theta_1}\right) - m\log\left(r_2 e^{i\theta_2}\right) = m\log\left(\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}\right)$$

$$= m\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + m\log e^{i(\theta_1-\theta_2)} = m\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + im(\theta_1-\theta_2) = \phi + i\psi$$

これより，速度ポテンシャルと流れ関数は次のように求められる。

$$\phi = m\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \qquad \text{（答）}$$

$$\psi = m(\theta_1-\theta_2) \qquad \text{（答）}$$

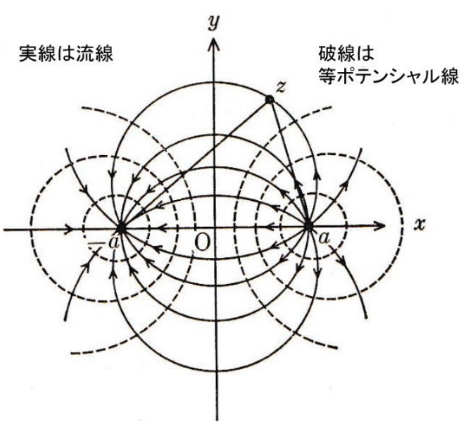
流線の関数は，C を定数として次のようになる。

$$m(\theta_1-\theta_2) = C$$

ここで，次のように置き換えを行うと，角度 θ が一定となる点の軌跡が流線となる。

$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

次の図に示すように，角度 θ が一定であるということは，θ は円周角となり，C 点は線分 AB を弦とする円上にあると言える。すなわち，流線は定点 A と B を通る円弧となり，吹き出しのある A 点から吸い込みのある B 点に向かう流れとなる。従って，次のような図になる.



4．図 8－13 の円柱まわりの流れに時計まわりの循環 $\varGamma$ を与えた流れについて，以下の問いに答えよ。流体の密度は ρ とする。

⑴　$\varGamma = 4\pi RU$ の場合のよどみ点の座標を求めよ。また，円柱表面上の流速分布を横軸に角度 θ，縦軸に無次元の流速 v_θ/U をとって描け。

⑵　$\varGamma = 8\pi RU$ の場合のよどみ点の座標を求めよ。また，円柱表面上の流速分布を(1)と同様に描け。

⑶　⑵の場合の円柱表面上の最大圧力と最小圧力を求めよ。体積力は考慮しなくてよい。ただし，上流側で円柱から十分離れた位置の流速を U，圧力を p_0 とする。

略解：

⑴　循環 $\varGamma$ を付与した円柱まわりの流れの流速の成分は次のように表される。

$$v_r = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$v_\theta = -U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{\varGamma}{2\pi r}$$

$\varGamma = 4\pi RU$ を代入すると次のようになる。

$$v_r = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$v_\theta = -U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{4\pi RU}{2\pi r} = -U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta - 2U\frac{R}{r}$$

$v_r = v_\theta = 0$ となる点がよどみ点であり，v_r については，

$$v_r = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta = 0$$

を満たすのは　$r = R$

または，$\cos\theta = 0$

すなわち　$\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

のときであることがわかる。そこで，$r = R$ の場合と $r > R$ の場合にわけて，よどみ点の座標を求めてみる。

⒜　$r = R$ の場合

v_θ は次のように整理することができる。

$$v_\theta = -U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta - 2U\frac{R}{r} = -U\left\{\left(1 + \frac{R^2}{R^2}\right)\sin\theta + 2\frac{R}{R}\right\}$$

$$= -U(2\sin\theta + 2) = -2U(\sin\theta + 1)$$

これより，$v_\theta = 0$ となるのは　$\sin\theta = -1$

すなわち，$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$

のときであることがわかる。$\theta=\pi/2$ では，$v_r=0$ にはなるが，$v_\theta=0$ とはならないことから，$r=R$ と $\theta=3\pi/2$ を同時に満たす点だけがよどみ点となる。

(b) $r>R$の場合

$v_r=0$ となるのは，$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$

のときのみである。$\theta=\pi/2$ のとき，v_θ は次のようになる。

$$v_\theta=-U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta-2U\frac{R}{r}=-U\left\{\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)+2\frac{R}{r}\right\}$$

これより，常に $v_\theta<0$ となり，$\theta=\pi/2$ のもとではよどみ点は存在しないことがわかる。$\theta=3\pi/2$ のときは，v_θ は次のようになる。

$$v_\theta=-U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta-2U\frac{R}{r}=U\left\{\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)-2\frac{R}{r}\right\}=U\left(1-\frac{R}{r}\right)^2$$

これより，常に $v_\theta>0$ となり，$\theta=3\pi/2$ のもとでもよどみ点は存在しないことがわかる。以上(a)と(b)の 2 つの場合をまとめると，円柱から離れた位置 $(r>R)$ によどみ点は存在せず，円柱表面$(r=R)$ にのみよどみ点が存在し，その座標は次のようになる。

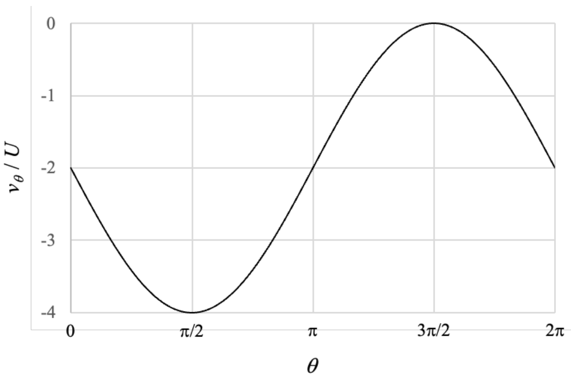
$$(r,\theta)=\left(R,\frac{3}{2}\pi\right)$$ （答）

円柱表面上では，常に $v_r=0$ であることから，流速は v_θ のみとなる。v_θ はすでに求めている通り，次のように表される。

$$v_\theta=-2U(\sin\theta+1)$$

$$\frac{v_\theta}{U}=-2(\sin\theta+1)$$

θ と v_θ/U の関係をグラフにすると次のようになり，流速分布が得られる。（答）



(2) (1)と同様に，流速の成分の式に $\Gamma=8\pi RU$ を代入すると次のようになる。

$$v_r=U\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$v_\theta = -U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{8\pi RU}{2\pi r} = -U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta - 4U\frac{R}{r}$$

よどみ点を求めるために $v_r = v_\theta = 0$ とすると，v_r については，⑴と同様に

$$r = R \quad もしくは \quad \cos\theta = 0$$

すなわち，

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \ \frac{3}{2}\pi$$

のときにゼロになるので，$r = R$ の場合と $r > R$ の場合にわけて，よどみ点の座標を求めてみる。

⒜ $r = R$ の場合

v_θ は次のように整理することができる。

$$v_\theta = -U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta - 4U\frac{R}{r} = -U\left\{\left(1+\frac{R^2}{R^2}\right)\sin\theta + 4\frac{R}{R}\right\}$$

$$= -U(2\sin\theta + 4) = -2U(\sin\theta + 2)$$

ここで，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ であることから，$v_\theta = 0$ となることはないことがわかる。すなわち，円柱表面上にはよどみ点が存在しない。

⒝ $r > R$ の場合

$v_r = 0$ となるのは，

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \ \frac{3}{2}\pi$$

のときのみである。$\theta = \pi/2$ のとき，v_θ は次のようになる。

$$v_\theta = -U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta - 4U\frac{R}{r} = -U\left\{\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right) + 4\frac{R}{r}\right\}$$

これより，常に$v_\theta < 0$ となり，$\theta = \pi/2$ のもとではよどみ点は存在しないことがわかる。$\theta = 3\pi/2$ のときは，v_θ は次のようになる。

$$v_\theta = -U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta - 4U\frac{R}{r} = U\left\{\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right) - 4\frac{R}{r}\right\} = U\left\{\left(1-\frac{R}{r}\right)^2 - 2\frac{R}{r}\right\}$$

これより，$v_\theta = 0$ となる R/r を求めると

$$\frac{R}{r} = 2 \pm \sqrt{3}$$

となるが， $R/1 < 1$ であることを考慮すると，

$$\frac{R}{r} = 2 - \sqrt{3}$$

のみが解となり，

$$r = \frac{R}{2-\sqrt{3}}$$

の位置がよどみ点となる。

以上(a)と(b)の 2 つの場合をまとめると，円柱表面 $(r = R)$ によどみ点は存在せず，円柱から離れた位置 $(r > R)$ によどみ点が存在することになり，その座標は次のようになる。

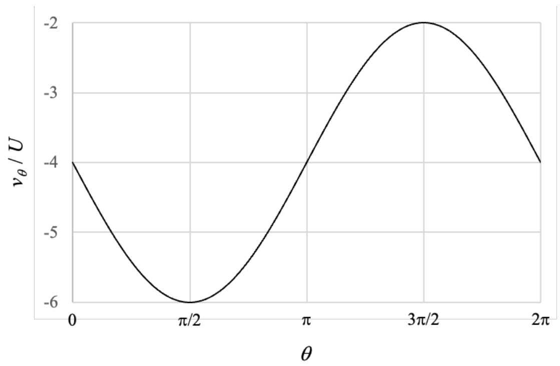
$$(r, \theta) = \left(\frac{R}{2-\sqrt{3}},\ \frac{3}{2}\pi\right) \qquad （答）$$

円柱表面上では，常に $v_r = 0$ であることから，流速は v_θ のみとなる。v_θ はすでに求めている通り，次のように表される。

$$v_\theta = -2U(\sin\theta + 2)$$

$$\frac{v_\theta}{U} = -2(\sin\theta + 2)$$

θ と v_θ/U の関係をグラフにすると次のようになり，流速分布が得られる。常に $v_\theta/U < 0$ であることから，円柱表面の流体は，循環と同一の方向に速さを変えながら旋回運動をすることになる。　　　（答）



(3)　(2)の流速分布から明らかなように，円柱表面で流速が最も小さいのは $\theta = 3\pi/2$ の点であり，その大きさは $2U$ である（方向は x 軸に平行な向き）。この点で圧力が最大となり，上流側とこの点との間でベルヌーイの式を適用すると，最大圧力 $p_{\max}$ を求めることができる。

$$p_0 + \frac{\rho U^2}{2} = p_{\max} + \frac{\rho(2U)^2}{2}$$

$$p_{\max} = p_0 + \frac{\rho U^2}{2} - \frac{4\rho U^2}{2}$$

$$p_{\max} = p_0 - \frac{3\rho U^2}{2} \qquad （答）$$

円柱表面で流速が最も大きいのは $\theta=\pi/2$ の点であり，その大きさは $6U$ である（方向は x 軸に平行な向き）。この点で圧力が最小となり，上流側とこの点との間でベルヌーイの式を適用すると，最小圧力 p_{min} を求めることができる。

$$p_0+\frac{\rho U^2}{2}=p_{\mathrm{min}}+\frac{\rho(6U)^2}{2}$$

$$p_{\mathrm{min}}=p_0+\frac{\rho U^2}{2}-\frac{36\rho U^2}{2}$$

$$p_{\mathrm{min}}=p_0-\frac{35\rho U^2}{2}$$ （答）

5．ポアズイユ流れについて以下の問いに答えよ。

⑴　単位流路幅（＝1m）あたりの体積流量 Q は次のように定義される。

$$Q=\int_0^h u(y)\,dy$$

ポアズイユ流れの速度分布 $u(y)$ の式を用いて，体積流量 Q を求めよ。

⑵　体積流量 Q と流路面積 A により平均流速が定義される。

$$u_{\mathrm{m}}=\frac{Q}{A}=\frac{Q}{h\times 1}=\frac{Q}{h}$$

設問⑴の結果に基づいて平均流速を求めよ。

⑶　ポアズイユ流れの最大流速 u_{max} と平均流速 u_{m} との間には次の関係が成り立つことを示せ。

$$\frac{u_{\mathrm{max}}}{u_{\mathrm{m}}}=\frac{3}{2}$$

⑷　代表長さとして平板間隔の 2 倍の長さ $2h$ をとり，平均流速を用いてレイノルズ数 Re を定義する。

$$Re=\frac{u_{\mathrm{m}}\times 2h}{\nu}=\frac{2\rho u_{\mathrm{m}}h}{\mu}$$

また，摩擦係数 λ を次のように定義する。

$$\lambda=-\frac{dp}{dx}\left\{\left(\frac{1}{2h}\right)\left(\frac{\rho {u_{\mathrm{m}}}^2}{2}\right)\right\}^{-1}$$

このとき，摩擦係数 λ とレイノルズ数 Re の関係が次のように表されることを示せ。

$$\lambda=\frac{96}{Re}$$

略解：

⑴　ポアズイユ流れの速度分布 $u(y)$ は次のように表される（8－2－2 項の例題ポ

アズイユ流れの速度分布を参照)。

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(hy - y^2)$$

これを体積流量 Q の定義式に代入して積分すればよい。

$$Q = \int_0^h \left\{-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(hy - y^2)\right\} dy = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\int_0^h (hy - y^2)\ dy$$

$$= -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left[\frac{h}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^h = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx} \qquad \text{(答)}$$

⑵ $u_{\mathrm{m}} = \dfrac{Q}{h} = -\dfrac{h^3}{12\mu}\dfrac{dp}{dx} \times \dfrac{1}{h} = -\dfrac{h^2}{12\mu}\dfrac{dp}{dx}$ （答）

⑶ 速度分布 $u(y)$ は次のように変形できる。

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left\{-\left(y - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{4}\right\}$$

これより最大流速が求められる。

$$u_{\mathrm{max}} = u|_{y=h/2} = -\frac{h^2}{8\mu}\frac{dp}{dx}$$

よって，最大流速 u_{max} と平均流速 u_{m} の関係は次のようになる。

$$\frac{u_{\mathrm{max}}}{u_{\mathrm{m}}} = \frac{-\dfrac{h^2}{8\mu}\dfrac{dp}{dx}}{-\dfrac{h^2}{12\mu}\dfrac{dp}{dx}} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \qquad \text{(答)}$$

⑷ 平均流速 u_{m} を表す式を圧力勾配について整理すると次のようになる。

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{12\mu}{h^2}u_{\mathrm{m}} = \frac{\mu}{\rho u_{\mathrm{m}}(2h)}\left(\frac{24\rho {u_{\mathrm{m}}}^2}{h}\right)$$

$$= \frac{\mu}{2\rho u_{\mathrm{m}} h}\left(\frac{48}{h}\right)\left(\frac{\rho {u_{\mathrm{m}}}^2}{2}\right) = \frac{96}{Re}\left(\frac{1}{2h}\right)\left(\frac{\rho {u_{\mathrm{m}}}^2}{2}\right)$$

これを摩擦係数 λ の定義式に代入すればよい。

$$\lambda = -\frac{dp}{dx}\left\{\left(\frac{1}{2h}\right)\left(\frac{\rho {u_{\mathrm{m}}}^2}{2}\right)\right\}^{-1} = \frac{\dfrac{96}{Re}\left(\dfrac{1}{2h}\right)\left(\dfrac{\rho {u_{\mathrm{m}}}^2}{2}\right)}{\left(\dfrac{1}{2h}\right)\left(\dfrac{\rho {u_{\mathrm{m}}}^2}{2}\right)} = \frac{96}{Re} \qquad \text{(答)}$$

6．クエット流れにおいて，一定の圧力勾配を与えたときの流速 u を求めよ。また，速度分布がどのような形になるか説明せよ。

略解：圧力勾配を与える場合，運動方程式は次式 8－79 の通りとなる（ポアズイユ流れと同じである）。

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

これを 2 回積分すると流速が求められる。

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\ \rightarrow \frac{du}{dy}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}y+C_1\rightarrow u=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2}+C_1y+C_2$$

ここで境界条件として $y=0$ で $u=0$，$y=h$ で $u=U$ となる条件を与えると積分定数が次のように決定される。

$$C_1=\frac{U}{h}-\frac{h}{2\mu}\frac{dp}{dx}\ ,\quad C_2=0$$

これより速度分布は次のように決定される。

$$u=-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(hy-y^2)+\frac{U}{h}y\qquad\text{（答）}$$

右辺の第 1 項はポアズイユ流れと同じ放物線状の速度分布であり，第 2 項がクエット流れの直線状の速度分布を表している。この場合，両者の和が合成された速度分布になることがわかる。

7．境界層内の流れについて，5 章で学んだ運動量理論を適用すると，壁面せん断応力 τ_{w} が流速 u，主流速度 U，密度 ρ を用いて次のように表される。

$$\tau_{\mathrm{w}}=\rho\frac{d}{dx}\int_0^{\delta}u\,(U-u)dy$$

これを次のように書き換える。

$$\tau_{\mathrm{w}}=\rho\frac{d}{dx}\int_0^{\delta}u\,(U-u)dy=\rho U^2\frac{d\delta}{dx}\int_0^{1}\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$=\rho U^2\frac{d\delta}{dx}\int_0^{1}\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)d\eta$$

ここで，η は境界層厚さ δ で無次元化した y 座標を意味する。

$$\eta=\frac{y}{\delta}$$

層流境界層内部の流速分布が式 8－84 に示したように近似できると仮定する。

$$\frac{u}{U}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3=\frac{3}{2}\eta-\frac{1}{2}\eta^3$$

このとき，境界層厚さ δ は次のように表される。

$$\delta = \frac{4.64x}{\sqrt{Re_x}}$$

この境界層厚さの計算式を以下の手順で求めよ。ただし，ニュートン流体を対象とする。

⑴　流速分布をせん断応力の計算式に代入して次の関係が得られることを示せ。

$$\tau_{\mathrm{w}} = \frac{39}{280}\rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

⑵　境界層内の速度勾配が次のように表されることを示せ。

$$\frac{du}{dy} = \frac{3}{2}\frac{U}{\delta}\left\{1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right\}$$

⑶　壁面せん断応力が次のように表されることを示せ。

$$\tau_{\mathrm{w}} = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = \frac{3}{2}\mu\frac{U}{\delta}$$

⑷　⑴と⑶で得られた壁面せん断応力が等しいとし，得られた微分方程式から境界層厚さ δ の計算式を導出せよ。

略解：

⑴　流速分布の関数を壁面せん断応力の計算式に代入し積分の計算を実行すると次のようになる。

$$\tau_{\mathrm{w}} = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}\int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}\int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta$$

$$= \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}\int_0^1 \left\{\frac{u}{U} - \left(\frac{u}{U}\right)^2\right\} d\eta = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}\int_0^1 \left\{\left(\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3\right) - \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3\right)^2\right\} d\eta$$

$$= \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \times \frac{39}{280}$$

すなわち，壁面せん断応力は次のように表されることがわかる。

$$\tau_{\mathrm{w}} = \frac{39}{280}\rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

⑵　流速分布を次のように微分する。

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{d\eta} \times \frac{d\eta}{dy}$$

ここで，

$$\frac{du}{d\eta} = \frac{d}{d\eta}\left\{U\left(\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3\right)\right\} = U\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\eta^2\right) = \frac{3}{2}U(1 - \eta^2)$$

$$= \frac{d\eta}{dy} = \frac{1}{\delta}$$

であることから，流速分布の勾配が次のように求められる。

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{d\eta} \times \frac{d\eta}{dy} = \frac{3}{2}U(1 - \eta^2) \times \frac{1}{\delta}$$

$$=\frac{3}{2}\frac{U}{\delta}(1-\eta^2)=\frac{3}{2}\frac{U}{\delta}\left\{1-\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right\}$$ （答）

⑶ ⑵の結果から，壁面上 $(y=0)$ での流速の勾配は次のように求められる。

$$\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=\frac{3}{2}\frac{U}{\delta}$$

これより壁面せん断応力は次のように表されることがわかる。

$$\tau_{\mathrm{w}}=\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=\frac{3}{2}\mu\frac{U}{\delta}$$ （答）

⑷ ⑴と⑶で得られた壁面せん断応力を等しいとおくと次の関係が得られる。

$$\tau_{\mathrm{w}}=\frac{39}{280}\rho U^2\frac{d\delta}{dx}=\frac{3}{2}\mu\frac{U}{\delta}$$

これを整理すると次の微分方程式が得られる。

$$\delta\frac{d\delta}{dx}=\frac{140}{13}\frac{\mu}{\rho U}$$

これを

$$\delta d\delta=\frac{140}{13}\frac{\mu}{\rho U}dx$$

と書き換え積分を実行すると次の関係が得られる（C は積分定数である）。

$$\frac{1}{2}\delta^2=\frac{140}{13}\frac{\mu}{\rho U}x+C=\frac{140}{13}\frac{\mu}{\rho Ux}x^2+C$$

ここで，局所レイノルズ数の定義が

$$Re_x=\frac{\rho Ux}{\mu}$$

であることから，さらに次のように書き換えることができる。

$$\frac{1}{2}\delta^2=\frac{140}{13}\frac{\mu}{\rho U}x+C=\frac{140}{13}\frac{\mu}{\rho Ux}x^2+C=\frac{140}{13}\frac{1}{Re_x}x^2+C$$

平板先端 $(x=0)$ で境界層厚さがゼロ $(\delta=0)$ であることから，積分定数が $C=0$ であることがわかるので，$\delta>0$ であることを考慮して，境界層厚さは次のように求められる。

$$\delta=\sqrt{\frac{280}{13}\frac{1}{Re_x}x^2}=\frac{4.64x}{\sqrt{Re_x}}$$ （答）

８．以下の問いに答えよ。

⑴　流速 $U = 5.0\mathrm{m/s}$ の空気の一様流れに平行に置かれた平板上の流れについて，平板先端から 300mm，平板から垂直に 10mm の位置においてピトー管で流速を測定したところ，主流とほぼ等しい流速が得られた。境界層の厚さの観点から，この測定結果が妥当であるか意見を述べよ。空気の温度は 20℃，圧力は 101.3kPa であるとする。

⑵　ある学生が，自家用車が静止空気中を時速 40km で水平方向に直進する際の車体まわりの流れを調べる課題に取り組んでいる。実車の 1/40 のスケールのミニカーを使用し，小型風洞で空気の流れの可視化実験を行うことを提案する予定である。この提案は妥当であるか意見を述べよ。空気の温度や圧力は同一の条件であるとする。

略解：

⑴　平板先端から $x = 300\mathrm{mm} = 0.3\mathrm{m}$ の位置における境界層厚さを求めてみる。20℃, 101.3kPa の空気の動粘性係数は $\nu = 15.15 \times 10^{-6}\mathrm{m^2/s}$ であることから，局所レイノルズ数の値は次のように求められる。

$$Re_x = \frac{Ux}{\nu} = \frac{5.0 \times 0.3}{15.15 \times 10^{-6}} = 9.90 \times 10^4$$

よって，測定位置は層流境界層が発達している領域に入っている。層流境界層の厚さを求めると

$$\delta = \frac{4.91x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{4.91 \times 0.3}{\sqrt{9.90 \times 10^4}} = 4.68 \times 10^{-3}$$

すなわち，平板先端からの距離が 300mm の位置では境界層厚さが 4.68mm であることがわかる。ピトー管の設置位置は平板から 10mm 離れているため境界層内ではなく，主流の流速を測定していることになる。この実験で主流とほぼ同じ流速が得られていることは妥当であると判断できる。　　　（答）

⑵　実車の速度を $U_1 = 40\mathrm{km/h}$，実車の寸法を L_1 ，ミニカーの寸法を L_2 とし，レイノルズの相似則に基づいて，ミニカーの実験での流速　U_2 を求めると次のようになる。ν は空気の動粘度で，実車とミニカーで同一条件を与えるとする。

$$Re_x = \frac{U_1 L_1}{\nu} = \frac{U_2 L_2}{\nu}$$

$$U_2 = U_1 \left(\frac{L_1}{L_2}\right) = 40 \times \left(\frac{40}{1}\right) = 1600\mathrm{km/h}$$

これより，ミニカーを流速 $1600\mathrm{km/h} = 444\mathrm{m/s}$ の空気流に置く必要がある。20℃の空気中の音速が 343m/s であることからこの流れは超音速流れとなる。その場合には，空気の圧縮性を考慮し，衝撃波の発生に注意する必要が生じる。実車のまわりの空気の流れは非圧縮性であると考えてよいので，実車とミニカーでは流れの現象自体が全く異なるものとなる。レイノルズの相似則を満たしていたとしても実験は成立しないと考えるべきであり，妥当ではないと判断できる。（答）

8 章　巻末問題

1　x 軸に平行な一様流れと原点 O からの吹き出しを重ね合わせた二次元ポテンシャル流れの複素速度ポテンシャル $W(z)$ は次のように表される（U と m は正の定数である）。この流れについて $z = re^{i\theta}$ として以下の問いに答えよ。

$$W(z) = Uz + m\log z$$

⑴　速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ を求めよ。

⑵　流速 $(v_r,\ v_\theta)$ を求めよ。

⑶　よどみ点の座標を求めよ。

⑷　よどみ点を通る流線の関数を求め，それが y 軸と交わる点の座標を求めよ。

⑸　よどみ点より x 座標が小さい領域において x 軸 $(y = 0)$ が流線となることを説明せよ。

⑹　$U = 30$，$m = 25$，よどみ点を通る流線を描き，この複素速度ポテンシャルがどのような流れを表しているか説明せよ。表計算ソフトを使用するとよい。

略解：

⑴　極形式で $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと複素速度ポテンシャルの式は次のように表される。

$$W(z) = Ur(\cos\theta + i\sin\theta) + m\log re^{i\theta}$$

$$= (Ur\cos\theta + m\log r) + i(Ur\sin\theta + m\theta)$$

よって，速度ポテンシャルと流れ関数は次のように求められる。

$$\phi = Ur\cos\theta + m\log r \qquad \text{（答）}$$

$$\psi = Ur\sin\theta + m\theta \qquad \text{（答）}$$

⑵　流速は次のように求められる。

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = U\cos\theta + \frac{m}{r} \qquad \text{（答）}$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -U\sin\theta \qquad \text{（答）}$$

⑶　よどみ点では，$v_r = v_\theta = 0$ となる。$v_\theta = 0$ より，$\theta = 0,\ \pi$ の点がよどみ点の候補となる。$\theta = 0$ を，$v_r = 0$ とした式に代入すると

$$U\cos\theta + \frac{m}{r} = 0$$

$$r = -\frac{m}{U\cos\theta} = -\frac{m}{U}$$

となり，$r < 0$ となってしまうことから，$\theta = 0$ ではよどみ点が存在しない。$\theta = \pi$ では，

$$r = -\frac{m}{U\cos\theta} = \frac{m}{U}$$

となることから，よどみ点の座標は次のように求められる。

$$(r,\theta)=\left(\frac{m}{U},\pi\right)$$ （答）

⑷　流線は流れ関数が一定となる線であり，流れ関数によどみ点の座標を代入すると，次のように定数を求めることができる。

$$\psi = Ur\sin\theta+m\theta=U\frac{m}{U}\sin\pi+m\pi=m\pi$$

よって，流線の関数は次のようになる。

$$Ur\sin\theta+m\theta=m\pi$$ （答）

y 軸上の点の θ 座標は, $\theta=\pi/2$，$3\pi/2$ であるので, 流線の関数にこれらの θ を代入すると，流線とy 軸が交わる点の r 座標を求めることができる。流線の関数を次のように変形する。

$$r=\frac{m(\pi-\theta)}{U\sin\theta}$$

これに $\theta=\pi/2$ を代入すると次のように r 座標が得られる。

$$r=\frac{m\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{U\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{m\frac{\pi}{2}}{U}=\frac{\pi}{2}\frac{m}{U}$$

同様に，$\theta=3\pi/2$ を代入すると次のようにr 座標が得られる。

$$r=\frac{m\left(\pi-\frac{3\pi}{2}\right)}{U\sin\frac{3\pi}{2}}=\frac{-m\frac{\pi}{2}}{-U}=\frac{\pi}{2}\frac{m}{U}$$

以上より，よどみ点を通る流線が y 軸と交わる点の座標は次のようになる。

$$(r,\ \theta)=\left(\frac{\pi}{2}\frac{m}{U},\ \frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{2}\frac{m}{U},\ \frac{3\pi}{2}\right)$$ （答）

⑸　二次元の直角座標 $(x,\ y)$ と極座標 $(r,\ q)$ の関係は次の通りである。

$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$

よって，よどみ点を通る流線の関数は次のように書き換えられる。

$$Uy+m\theta=m\pi$$

よどみ点の θ 座標 $\theta=\pi$ を代入すると, $y=0$ であることは明らかであり, x 軸が流線であることがわかる。$0<\theta<\pi$，すなわち，よどみ点よりも x 座標が大きい領域では，$y>0$ となるため，$y=0$ は流線とはならない。　（答）

⑹　流線の関数は $\psi=C$ （C は定数）で表される。

$$Ur\sin\theta+m\theta=C$$

$U=30$ と $m=25$ を代入して，整理すると次の関係が得られる。

$$r=\frac{m}{U}\frac{\left(\frac{C}{m}-\theta\right)}{\sin\theta}=\frac{25}{30}\frac{\left(\frac{C}{m}-\theta\right)}{\sin\theta}=\frac{5}{6}\frac{\left(\frac{C}{m}-\theta\right)}{\sin\theta}$$

よどみ点を通る流線の場合は $C=m\pi$ であり，r と θ の関係は次のように表される。

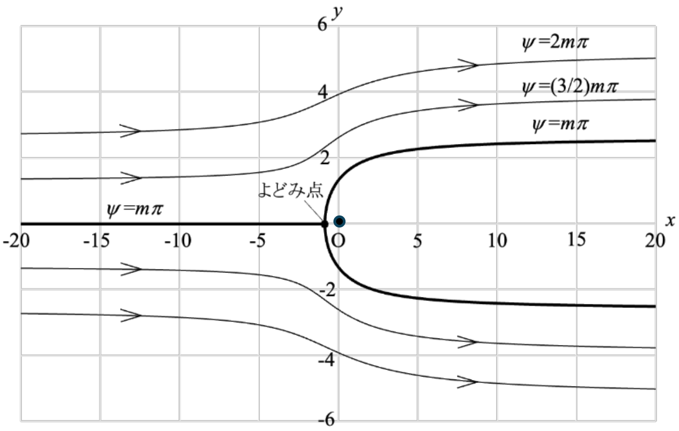
$$r = \frac{5}{6}\frac{(\pi - \theta)}{\sin\theta}$$

ここで，θ を 0 に近い小さな数値（例えば 0.01π ）から π に近い数値（例えば 0.99π ）まで変化させたときの r の値を計算し，流線上の点の（r，θr）座標を計算する。さらに，π に近い数値から 2π に近い数値まで同様の計算を行う。このようにして得られた点の（x，y）座標を以下の関係から求める（上述の計算は表計算ソフトを使用すると容易に行える）。

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

この x と y の関係をプロットすることにより流線を描画することができる。以下の図の太線がよどみ点を通る流線である。よどみ点より右側の流線を物体の表面とみなすことにより，この流れは，一様流れに置かれた先端が丸まった平板形状の物体まわりの流れであることがわかる。図には，$C = (3/2)m\pi$ と $C = 2m\pi$ の流線も併記しており，上述の流れの様相をよく表していることが確認できる。（答）



２．200mm × 200mm の正方形断面をもつ長さ 1m の小型風洞（流入部には乱れを減衰させる整流器が設置されている）を用いて，直径 40mm の円柱まわりの流れの可視化実験を行うことを計画している。流体は大気圧で 20℃の空気であり，風量の操作範囲は $2.4\mathrm{m^3/min}$ から $48\mathrm{m^3/min}$ である。この実験計画について，以下の問いに答えよ。

⑴　風洞の中央部に円柱を設置する。円柱の上流の流れは一様流れであると考えてよい。その根拠を述べよ。

⑵　風量の操作範囲から，円柱まわりの流れの可視化で実験可能なレイノルズ数の範囲を求めよ。

⑶　直径 40mm の円柱を用いた可視化実験で，直径 16cm の円柱まわりの流れの様子を再現することを考えた場合，再現可能な風速の範囲を求めよ。空気の圧力と温度は同一の条件としてよい。

略解：

⑴　整流器を通った空気流は流速分布がおおむね一様で風洞内に流入する。入口から壁面に沿って境界層が発達するので，平板上の流れと考え，中央位置での境界層厚さを見積もると次のようになる。

風量の最大値から最大の平均流速は次のように求められる（Q は体積流量，S は流路断面積を表す）。

$$U = \frac{Q}{S} = \frac{48 \times \frac{1}{60}}{0.2 \times 0.2} = 20\mathrm{m/s}$$

空気の動粘度は $\nu = 15.15 \times 10^{-6}\mathrm{m^2/s}$ であるので，中央位置 $x = 0.5\mathrm{m}$ での局所レイノルズ数を計算すると次のようになる。

$$Re_x = \frac{Ux}{\nu} = \frac{20 \times 0.5}{15.15 \times 10^{-6}} = 6.60 \times 10^5$$

よって，中央位置では乱流境界層になっていると考えることできる。境界層厚さは次のように求められる。

$$\delta = \frac{0.37x}{{Re_x}^{1/5}} = \frac{0.37 \times 0.5}{(6.60 \times 10^5)^{1/5}} = \frac{0.185}{14.585} = 0.0127\mathrm{m} = 12.7\mathrm{mm}$$

以上より，円柱を設置する付近の境界層厚さが 13mm 程度であることから，円柱は主流内に設置してあると考えられることから，円柱の上流側は一様流れとみなせる。（答）

⑵　風洞内の空気の最小流速は次のように求められる。

$$U=\frac{Q}{S}=\frac{2.4\times\frac{1}{60}}{0.2\times0.2}=1.0\mathrm{m/s}$$

最大流速は⑴で求めた通り，20m/s である。これより，実験可能なレイノルズ数の最大値と最小値が次のように求められる（Dは円柱の直径）

最小値　$Re=\frac{UD}{\nu}=\frac{1.0\times0.04}{15.15\times10^{-6}}=2640$

最大値　$Re=\frac{UD}{\nu}=\frac{20\times0.04}{15.15\times10^{-6}}=52800$

以上より，実験可能なレイノルズ数の範囲は次のようになる。

$2.64\times10^{3}\le Re\le5.28\times10^{4}$（答）

⑶　レイノルズの相似則に基づいて，風洞で再現可能な直径 16cm の円柱まわりの流れの流速を求めることができる。$D_1=40\mathrm{mm}$，$D_2=16\mathrm{cm}=160\mathrm{mm}$ とすると次のようになる。

最小流速　$U_2=U_1\frac{D_1}{D_2}=1.0\times\frac{40}{160}=1.0\times\frac{1}{4}=0.25\mathrm{m/s}$　（答）

最大流速　$U_2=U_1\frac{D_1}{D_2}=1.0\times\frac{40}{160}=20\times\frac{1}{4}=5.0\mathrm{m/s}$　（答）