「流体力学」　第６章　問題の解答

６－１　ドリル問題

問題１　動粘度 ν=1.43×10^{-5}m^2/s の空気が内径 0.0254m の管内を流れている。この管内で層流に保たれる最大流速はいくらか。

略解：内径 0.0254m の管内を流れるときの臨界レイノルズ数を $Re_c = 2300$ として，流速 u を求める。

$$u = \frac{Re_c \nu}{D} = \frac{2300\left(1.43\times10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\right)}{0.0254\mathrm{m}} = 1.3\mathrm{m/s} \qquad \text{（答）}$$

問題２　タンクから内径 10.0mm の鋼管に毎分 0.150 リットルで水が流れている。このときの助走距離 Le[m]を求めよ。ただし，水の動粘度は $\nu = 1.00\times10^{-6}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ とする。

略解：まず，流量を Q，管内径を d として平均流速 u を求める。

$$u = 4Q/\left(\pi d^2\right) = 4\times0.150\times10^{-3}/60\mathrm{m}^3/\mathrm{s}\,[3.14\times\left(10.0\times10^{-3}\right)^2]\mathrm{m} = 0.0318\mathrm{m/s}$$

次にレイノルズ数 Re を式 6－3 から求めると

$$Re = ud/\nu = 0.0318\mathrm{m/s}\times10.0\times10^{-6}\mathrm{m}/\left(1.00\times10^{-6}\right)\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$$

$$= 318 < 2300 \qquad \text{（臨界レイノルズ数，3 －2 －4参照）}$$

よって，管内の流れは層流であるので，式 6－1 より助走距離 Le は

$$Le = \left(0.06 \sim 0.065\right) Re\, d$$

$$= \left(0.06 \sim 0.065\right)\times318\times10.0\times10^{-3}\mathrm{m}$$

$$= 0.198 \sim 0.2067\mathrm{m} = 19 \sim 21\mathrm{cm} \quad \text{となる。} \qquad \text{（答）}$$

問題３　タンクから内径 10.0ｍｍの鋼管に毎分 3.00 リットルで水が流れている。このときの助走距離 Le[ｍ]を求めよ。ただし，水の動粘度は $\nu = 1.00\times10^{-6}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ とする。

略解：まず，流量を Q，管内径を d として平均流速 u を求める。

$$u = 4Q/\left(\pi d^2\right) = 4\times3.00\times10^{-3}/60\mathrm{m}^3/\mathrm{s}/[3.14\times(10.0\times10^{-3})^2]\mathrm{m} = 0.637\mathrm{m/s}$$

次にレイノルズ数 Re を式 6－3 から求めると

$$Re = ud/\nu = 0.637\mathrm{m/s}\times10.0\times10^{-3}\mathrm{m}/(1.00\times10^{-6})\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$$

$$= 6370 > 2300 \qquad \text{（臨界レイノルズ数，3 －2 －4参照）}$$

よって，管内の流れは乱流であるので，式 6－2 より助走距離 Le は次のようになる。

$$Le = (25 \sim 40)\,d = (25 \sim 40)\times10\mathrm{mm} = 25 \sim 40\mathrm{cm} \qquad \text{（答）}$$

６－２　ドリル問題

問題１　内径 $d = 3.5\text{mm}$ のストローで，毎分１リットルのソフトドリンクを吸っている。このときの，ストロー内の流れは層流か乱流か。ソフトドリンクの動粘度は，$2\times10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ とする。

略解：ストロー内の平均流速は，流量を Q とすると

$$u = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4\times1\times10^{-3}/60\,\text{m}^3/\text{s}}{3.14\times\left(3.5\times10^{-30}\text{m}\right)^2} = 1.73\text{m/s}$$

となり，レイノルズ数は式 6－3 より

$$Re = ud/\nu = 1.73\text{m/s}\times3.5\times10^{-3}\,\text{m} \,/\, (2\times10^{-6})\text{m}^2/\text{s} = 3028 > 2300$$

となるので乱流である。　　　　（答）

問題２　動粘度 $\nu = 1.12\times10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ の水が内径 0.0254m の管内を流れている。この管内で層流に保たれる平均流速の最大値はいくらか求めよ。

略解：層流を保つためのレイノルズ数は約 2300（臨界レイノルズ数，3－2－4 項参照）である。臨界レイノルズ数を 2300 として，最大速度 $u_{\max}$ を求めると

$$u_{\max} = \frac{Re\nu}{d} = \frac{(2300)\left(1.12\times10^{-6}\,\dfrac{\text{m}^2}{\text{s}}\right)}{0.0254\text{m}} = 0.10\text{m/s} \qquad \text{（答）}$$

問題３　層流における管摩擦係数は一つの無次元パラメータに依存する。それは何か。

略解：　式 6－25 より，レイノルズ数である。　　　（答）

問題４　管壁の粗さの影響がある乱流において，管摩擦係数が依存する２つの無次元パラメータは何か。

略解：レイノルズ数と相対粗さ（壁面粗さを管内径で割ったもの）　　　（答）

６－３　ドリル問題

問題１　1/7 乗則の速度分布が適用できる流れはどんな流れか。

略解：乱流　　　　（答）

問題２　乱流の指数法則による速度分布の問題点はどこか。

略解：速度勾配 $d\bar{u}/dy$ の値は物理的に管中心でゼロになるべきであるが，指数法則による速度分布ではゼロにならないことや，管壁における速度勾配 $d\bar{u}/dy$ は無限大となり，壁面せん断応力 τ_w の値を求めることはできいなどの問題点を持つ。（答）

問題３　真直ぐな円管内の層流で最大流速が生じるのはどこか。

略解：管中心　　　　（答）

問題４　内径 20cm，長さ 500m の円管を用いて，流量 $Q = 0.10\mathrm{m^3/s}$ の水を送る場合，円管の管摩擦損失ヘッドはいくらか，管摩擦係数 λ を 0.013 として計算せよ。ただし，管内壁は滑らかであるとする。

略解：平均流速 u は，流量を流路面積で割ったものであるから

$$u = \frac{0.10}{(\pi/4) \times 0.2^2} = 3.18\mathrm{m/s}$$　となり，

式 6－5 より，管摩擦損失ヘッドは

$$h = \lambda \frac{L}{d}\frac{u^2}{2g} = 0.013 \times \frac{500 \times 3.18^2}{0.2 \times 2 \times 9.8} = 38.7\mathrm{m} = 16.8\mathrm{m}$$　（答）

となる。

問題５　内径 10cm の市販の鋳鉄管($\varepsilon = 0.26\mathrm{mm}$)に，動粘度 $\nu = 1.15 \times 10^{-6}\mathrm{m^2/s}$ の水を平均流速 3.0m/s で流す場合の管摩擦係数をムーディ線図（図 6－11）から求めよ.

略解： $u = 3.0\mathrm{m/s}$,　$d = 0.10\mathrm{m}$,　$\nu = 1.15 \times 10^{-6}\mathrm{m^2/s}$ あるから，レイノルズ数は

$$Re = \frac{ud}{\nu} = \frac{3.0 \times 0.10}{1.15 \times 10^{-6}} = 2.6 \times 10^5$$　となる。

鋳鉄管の内壁の粗度 $\frac{\varepsilon}{d}$ は 0.0026 であるから，管摩擦係数は図 6－11 より

$\lambda \cong 0.027$ となる。　　　（答）

問題６　平均流速を u，動粘度を ν として，次の断面形状の管路のレイノルズ数を求めよ

⒜　一辺が x [m]の正方形断面。

略解：式 6－39 より $m=\dfrac{x^2}{4x}$， 式 6－40 より $d_\mathrm{e}=4m=x$

式 6－42 より $Re=\dfrac{ud_\mathrm{e}}{\nu}=\dfrac{ux}{\nu}$　　　　（答）

⒝　一辺が x [m] の正三角形断面。

略解：式 6－39 より $m=\dfrac{x\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\times\dfrac{1}{2}}{3x}=\dfrac{x}{4\sqrt{3}}$， 式 6－40 より $d_\mathrm{e}=4m=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$,

式 6－42 より $Re=\dfrac{ud_\mathrm{e}}{\nu}=\dfrac{ux}{\sqrt{3}\nu}$　　　　（答）

問題７　断面の１辺の長さが a と b の長方形管路において，管摩擦係数 λ 及び管路の長さ L が一定な場合，損失ヘッド h は $\dfrac{(a+b)}{(ab)^3}$ に比例することを示せ。

略解：平均流速は $u=\dfrac{Q}{ab}$，水力平均深さ m は式 6－39 から $m=\dfrac{A}{S}=\dfrac{ab}{2(a+b)}$ となる。

これらを式 6－41 に代入すると，損失ヘッド h は次のようになる.

$$h=\lambda\frac{L}{4m}\cdot\frac{u^2}{2g}=\lambda\frac{L}{4\dfrac{ab}{2(a+b)}}\frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{ab}\right)^2$$

$$=\lambda\frac{LQ^2}{4\dfrac{ab}{(a+b)}}\frac{1}{g}\left(\frac{1}{ab}\right)^2=\frac{\lambda LQ^2}{4g}\frac{(a+b)}{(ab)^3}=K\cdot\frac{(a+b)}{(ab)^3}$$

ここで，$K=\dfrac{\lambda LQ^2}{4g}$ は一定であるから, 損失ヘッド h は $\dfrac{(a+b)}{(ab)^3}$ に比例する。　　（答）

問題８　平均流速を u，動粘度を ν とした場合，図 6－17 に示すように 2 重円筒管路の内径を d [m]，外形を D [m]とする管路のレイノルズ数を求めよ。

略解：式 6－39 より $m=\dfrac{\dfrac{D^2}{4}\pi-\dfrac{d^2}{4}\pi}{(d+D)\pi}=\dfrac{1}{4}\dfrac{D^2-d^2}{D+d}$,

式 6－40 より $d_\mathrm{e}=4m=\dfrac{D^2-d^2}{D+d}=D-d$,

式 6－42 より $Re=\dfrac{ud_\mathrm{e}}{\nu}=\dfrac{u}{\nu}(D-d)$　　　（答）

問題９　内径を $d=100\text{mm}$，外径を $D=180\text{mm}$ とする図 6－17 の 2 重円筒管路において，内・外円管の間を毎分 4.22m^3 の水（水温 20℃）が流れている.管長 $L=30\text{m}$ の間で生じる管摩擦による損失ヘッド $h\,[\text{m}]$を求めよ。但し，粘度は $\mu=1.002\times10^{-3}\text{Pas}$，密度は $\rho=998.2\ \text{kg/m}^3$ であり，管の壁面の粗さの平均値を $\varepsilon=0.15\text{mm}$ とする。

略解：先ず管内の流れの状態(層流または乱流)を，レイノルズ数により判定し，管摩擦係数 λ を求める。流路断面形状が円形以外の流路のレイノルズ数を求めるには，流路の代表寸法として，水力等価直径 d_e を用いる。

式 6－39 より，水力平均深さは

$$m=\frac{A}{S}=\frac{\frac{\pi}{4}\left(D^2-d^2\right)}{\pi\left(D+d\right)}=\frac{\left(D-d\right)}{4}=\frac{0.18-0.1}{4}=0.02\text{m}\ \text{となる。}$$

また，管路の平均流速 u は

$$u=\frac{Q}{A}=\frac{4Q}{\pi\left(D^2-d^2\right)}=\frac{4\times4.22/60}{\pi\left(0.18^2-0.1^2\right)}=4.0\text{m/s}\ \text{となる。}$$

従って，レイノズル数は式 6－42 より

$$Re=\frac{u\cdot4m}{\nu}=\frac{\rho\cdot u\cdot4m}{\mu}=\frac{998.2\times4.0\times0.08}{1.008\times10^{-3}}=3.17\times10^5$$

となり，2300 より大きいので乱流である。

一方，相対粗さ $\dfrac{\varepsilon}{d_\text{e}}$ は，6－3－5 項の最後の式より

$$\frac{\varepsilon}{d_\text{e}}=\frac{\varepsilon}{4m}=\frac{\frac{0.15}{1000}}{4\times0.02}=0.001875\fallingdotseq0.00188\ \ \text{となる。}$$

従って，ムーディ線図より，$Re\fallingdotseq3.2\times10^5$ と $\dfrac{\varepsilon}{d_\text{e}}=0.00188$ の交点における管摩擦係数を求めると，$\lambda\fallingdotseq0.023$ となる。従って，損失ヘッド h は式 6－41 から次のようになる。

$$h=\lambda\cdot\frac{L}{4m}\cdot\frac{u^2}{2g}=0.023\cdot\frac{30}{4\times0.02}\cdot\frac{4.0^2}{19.6}=7.04\fallingdotseq7.0\text{m}\qquad\text{（答）}$$

６－４　ドリル問題

問題１　断面積が $A_1 = 0.10\mathrm{m}^2$ から $A_2 = 0.40\mathrm{m}^2$ に急に拡大する管路に，$Q = 0.30\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ の水を流す時の損失ヘッドを計算せよ.

略解：上流の平均流速 u_1 は，$u_1 = \dfrac{Q}{A_1} = \dfrac{0.3}{0.1} = 3\mathrm{m/s}$ である。

式 6－45 より

$$\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \left(1 - \frac{0.1}{0.4}\right)^2 = 0.563$$ であるから

損失ヘッド h_s は　$h_\mathrm{s} = \left(1 - \dfrac{A_1}{A_2}\right)^2 \dfrac{u_1^{\,2}}{2g} = 0.563 \times \dfrac{3^2}{2 \times 9.8} = 0.26\mathrm{m}$ となる。　（答）

問題２　図 6－27 (c)に示すちょう形弁が図 6－24 のように管路の途中に取り付けられている。流量が 0.050m³/s で管内径が 100mm，弁の開き角が 20° の時の損失ヘッドを求めよ。

略解：平均流速は，流量を管路断面積で割って次のように求められる。

$$u = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \times 0.050\mathrm{m}^3/\mathrm{s}}{\pi \times 0.1^2\mathrm{m}^2} = 6.37\mathrm{m/s}$$

弁の開き角が 20° の時の損失係数ζは，図 6－27 より $\zeta = 1.54$ であるから，式 6－44 に数値を代入すると損失ヘッドは次のようになる。

$$h = \varsigma \frac{u^2}{2g} = 1.54 \frac{6.37^2}{2 \times 9.8} = 3.2\mathrm{m}$$　（答）

６－５　ドリル問題

問題１　メジャー損失とマイナー損失との違いは何か。

略解：配管の直管部分で生じる損失がメジャー損失であり，管路に設置される弁，エルボ，ベンド度等の接続管等で生じる損失がマイナー損失である。　（答）

問題２　圧力損失を最小化するために，損失係数の値は，できるかぎり小さくするべきであるか。

略解：その通りである。損失係数を小さくすることは抵抗を小さくすることになる。（答）

問題３　水力直径は何を意味しているのか。

略解：水力直径とは，流路断面積を濡れ縁長さで割った値（水力平均深さ）の 4 倍の値で等価直径ともいう。断面が円形でない管路の場合のダルシー・ワイズバッハの式を用いる際に，円管の直径 d の代わりに水力直径を用いる。　（答）

問題４　図 6－34 のような直列管路がある。管摩擦係数 λ は内径 $d=200\text{mm}$ の管が 0.015, 内径 $d=100\text{mm}$ の管が 0.025 である。このときの流量 Q を求めよ。ただし，損失ヘッドの中で管摩擦以外の損失を無視する。

略解：式 6－50 から

$$H=\lambda_1\frac{L_1}{d_1}\frac{{u_1}^2}{2g}+\lambda_2\frac{L_2}{2_2}\frac{{u_2}^2}{2g}+\frac{{u_2}^2}{2g}$$

ここで，添え字 1 は内径 200mm の管の値を 2 は 100mm の管の値を示し，L は管の長さ，u は平均流速を示す。

それぞれの管の流路面積を A_1， A_2 とすると $u_1=\frac{A_2}{A_1}u_2$ となり

$$H=\lambda_1\frac{L_1}{d_1}\frac{1}{2g}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2u_2^2+\lambda_2\frac{L_2}{d_2}\frac{{u_2}^2}{2g}+\frac{{u_2}^2}{2g}=\frac{u_2^2}{2g}\left\{\lambda_1\frac{L_1}{d_1}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2+\lambda_2\frac{L_2}{d_2}+1\right\}$$

から， $u_2^2=2gH\,/\left\{\lambda_1\frac{L_1}{d_1}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2+\lambda_2\frac{L_2}{d_2}+1\right\}$

$H=60\text{m}$ として，各数値を代入すると，

$${u_2}^2=2\times9.8\times60\,/\left\{0.015\times\frac{100}{0.2}\times\left(\frac{100^2}{200^2}\right)^2+0.025\times\frac{300}{0.1}+1\right\}$$

となり u_2 を求めると

内径 100mm の管での流速は， $u_2=3.92\text{m/s}$ となり，流量 Q は

$$Q=A_2u_2=\frac{\pi}{4}0.1^2\times3.92\text{m/s}=0.031\text{m}^3/s \qquad \text{（答）}$$

となる。

問題５．図 6－35 に示すようなポンプで水をくみ上げる簡単な装置がある。送水に必要なポンプの水動力（水がポンプから受け取った単位時間当たりの仕事）を求めよ。ただし，吸い込みと吐き出し管の長さの合計は 10m，管摩擦係数は 0.020，管内平均流速を 2m/s とする。

水動力は $\rho g Q H_{\mathrm{t}}$ で与えられる。ここで，ρ は水の密度(1000kg/m^3)，Q は流量，H_{t} は全揚程で二つのタンクの水面差に式 6－50 で与えられる全ヘッドの差を加えたものである。

略解：全揚程 H_{t} は

$$H_{\mathrm{t}} = 15\mathrm{m} + \lambda \frac{L}{d}\frac{u^2}{2g} + \frac{u^2}{2g} = 15\mathrm{m} + 0.020\frac{10}{0.1}\frac{2^2}{2\times 9.8} + \frac{2^2}{2\times 9.8} = 15.61\mathrm{m}$$

となり，水動力は，$1000\times 9.8\times 2\times \frac{\pi}{4}\times 0.1^2\times 15.61 = 2401.8\mathrm{Nm/s} = 2.4\mathrm{kW}$　（答）

となる。

６章　演習問題

１．粘度 $\mu = 0.38\mathrm{Pa\cdot s}$，密度 $\rho = 912\mathrm{kg/m^3}$ の油が，流量 $0.01\mathrm{m^3/s}$ で，内径 100mm の水平管を流れている。流れが層流かどうか調べ，配管の長さが 500m の時の圧力損失を求めよ。

略解：平均流速は，流量を流路面積で割って

$$u = \frac{0.01\mathrm{m^3/s}}{\frac{\pi}{4}0.1^2\mathrm{m^2}} = 1.27\mathrm{m/s}$$ となり

レイノルズ数は，$$Re = \frac{\rho u d}{\mu} = \frac{912\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \times 1.27\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \times 0.100\mathrm{m}}{0.38\mathrm{Pa\cdot s}} = 305$$

となる。レイノルズ数が 2300 より小さく層流であるので，

式 6－17 から圧力損失は

$$\Delta p = \frac{128\mu LQ}{\pi d^4} = \frac{128 \times 0.38\mathrm{Pa\cdot s} \times 500\mathrm{m} \times 0.01\mathrm{m^3/s}}{\pi\,(0.100\mathrm{m})^4}$$

$$= 774522\mathrm{Pa} = 884.5\mathrm{kPa} = 0.77\mathrm{MPa}$$ （答）

である。

別解：レイノルズ数が 305 であるから，式 6－25 から管摩擦係数 λ は

$$\lambda = \frac{64}{Re} = 0.21$$ となる。従って，式 6－5 から圧力損失は

$$\Delta p = \rho\lambda\frac{L}{d}\frac{u^2}{2} = 912 \times 0.21 \times \frac{500}{0.1}\frac{1.27^2}{2} = 772257\mathrm{Pa} = 0.77\mathrm{MPa}$$

となり一致する。

２．内径 40cm の直円管を用い，6km 遠方に，1 時間に $900\mathrm{m^3}$ の水を送るのに，どれだけの圧力を必要とするか．但し，水の密度を $1000\mathrm{kg/m^3}$，管摩擦係数を 0.03，送水管出口の圧力を大気圧(ゲージ圧 0)とし，ゲージ圧で求めよ．

略解：管路長が内径の 2000 倍以上であるから，速度ヘッドの影響は小さいので無視する。すなわち，送水管の入口では，出口よりも管摩擦損失で失われる圧力分だけ高くする必要がある．その大きさは，式 6－5 より

$$\Delta p = \rho g h = \rho g \lambda \frac{L}{d}\frac{u^2}{2g} = \frac{\rho\lambda L u^2}{2d}\mathrm{Pa}$$ から求まる。

まず，平均流速を求めると，

$$u = \frac{900\mathrm{m^3}}{60 \times 60 \times (\pi/4) \times 0.4^2} = 1.99\mathrm{m/s}$$

従って，入口での圧力 p は，

$$p = \Delta p = 1000 \times 0.03 \times \frac{6000 \times 1.99^2}{2 \times 0.4} = 891\mathrm{kPa} = 0.9\mathrm{MPa}$$ （答）

３．動粘度が $\nu = 4.998\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$ である油が内径 0.0254m の市販の鋼管内を流れている。平均流速 ⒜3.05m/s，⒝12.19m/s の時の管摩擦係数 λ を求めよ。

略解：

⒜　最初にレイノルズ数を求めると

$$Re = \frac{ud}{\nu} = \frac{3.05\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\times 0.0254\mathrm{m}}{4.998\times10^{-5}\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s}}} = 1550 \le 2300$$ 　となり

流れは層流であるから管摩擦係数 λ は相対粗さ（ε/d）の影響を受けない。λ を求めるためにムーディ線図（図 6－11）を用いる。横軸上の 1.55×10^3 を見つける。それから直線（$\lambda = 64/Re$）まで垂直に伸ばす。さらに，左にに水平に伸ばして λ ＝0.041 の値を得る。一方，式６－２５（$\lambda = 64/Re$）から求めると，λ の計算値は 0.0413 となりムーディ線図から求めた値に一致する。　　　　（答）

⒝　まず，レイノルズ数を計算する。

$$Re = \frac{ud}{\nu} = \frac{12.19\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\times 0.0254\mathrm{m}}{4.998\times10^{-5}\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s}}} = 6195 \ge 2300$$

となり，流れは乱流である。管内壁の相対粗さを考慮する場合，ε/d の値が必要である。図 6－12 から，内径 0.0254m の市販の鋼管の場合の ε を求めると，$\varepsilon = 0.045\times10^{-3}\,\mathrm{m}$ であり

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0.045\times10^{-3}}{0.0254} = 0.0018$$　　　　（答）

が得られる。

図 6－11 のムーディ線図により，$\lambda \cong 0.04$ となる。

4．図 6－36 に示すように，水が流量 $Q = 0.946\text{m}^3/\text{min}$ でパイプラインの中を大きな貯水槽から流れている。マイナー損失とメジャー損失を比較しなさい。内径 $0.0762\,\text{m}$ の市販鋼管であり，パイプラインの全長は 15m である。ただし，貯水槽から管路に流入するときの損失係数 $\varsigma_\text{i} = 0.5$，また 90 度エルボの損失係数 $\varsigma_\text{e} = 0.75$，玉形弁の損失係数 $\varsigma_\text{v} = 10.0$ とし，水の動粘度を $\nu = 1.12\times10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}$ とする。

略解：最初に，メジャー損失である直管での損失ヘッド h_ma を計算する。

平均流速 u は流量を流路面積で割って

$$u = \frac{\dfrac{0.946}{60}\text{m}^3/\text{s}}{\dfrac{\pi}{4}\left(0.0762\text{m}\right)^2} = 3.46\frac{\text{m}}{\text{s}}$$ となりレイノルズ数は

$$Re = \frac{ud}{\nu} = \frac{3.459\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\times0.0762\text{m}}{1.12\times10^{-6}\dfrac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 235335 = 2.35\times10^5$$

図 6－12 より市販鋼管の粗さは $\varepsilon = 0.045\text{mm}$ であるから

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0.045\times10^{-3}\,\text{m}}{0.0762\text{m}} = 6.0\times10^{-4}$$ となる。

求められた Re と ε/d を使用して，ムーディ線図（図 6－11）から管摩擦係数を求めると，$\lambda \cong 0.018$ であるから，

$$h_\text{ma} = \lambda\frac{L}{d}\frac{u^2}{2g} = 0.018\times\frac{15\text{m}}{0.0762\text{m}}\times\frac{\left(3.46\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\times9.8\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2.2\text{m}$$

次に，マイナー損失である管路への流入損失，エルボでの損失および弁での損失ヘッド h_mi について計算する。

$$h_\text{mi} = \left(\varsigma_\text{i} + 2\times\varsigma_\text{e} + \varsigma_\text{v}\right)\frac{u^2}{2g} = \left(0.5 + 2\times0.75 + 10.0\right)\frac{\left(3.46\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\times9.8\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 7.3\text{m}$$

このように，この管路においては，マイナー損失はメジャー損失の 3 倍以上である。もちろん，配管の長さが十分に長いか，損失係数 ζ_v が小さい弁を使用すると，メジャー損失はマイナー損失よりも上回る。

5．図のようなバイパス管を持つ管路に水が流れる場合，分岐後本管へ流れる流量を Q_1，バイパス管へ流れる流量を Q_2 とした時の Q_2/Q_1 を求めよ。但し，本管の直径を $D=300\,\mathrm{mm}$,バイパス管の直径を $d=150\mathrm{mm}$ とし，それぞれの速度を u_1，u_2 とする。また，管路の損失係数を分岐点で $\zeta_s=1.5$，エルボで $\zeta_b=1.0$，合流点で $\zeta_c=0.3$ とし，本管とバイパス菅の管摩擦係数は，$\lambda_1=\lambda_2=0.02$，図中の管長は $L=5\mathrm{m}$，$l=1.5\mathrm{m}$ とする。（ヒント：分岐点 1 と合流点 2 での圧力差は，本管とバイパス管で等しい。）

略解：分岐点 1 と合流点 2 での圧力差 p_1-p_2 は，本管とバイパス管で次のようになる。

本管：$\dfrac{p_1}{\rho g}-\dfrac{p_2}{\rho g}=\lambda_1\dfrac{L}{D}\cdot\dfrac{u_1^2}{2g}$　　(1)

バイパス管：$\dfrac{p_1}{\rho g}-\dfrac{p_2}{\rho g}=\left(\zeta_s+2\zeta_b+\lambda_2\dfrac{L+2l}{d}+\zeta_c\right)\dfrac{u_2^2}{2g}$　　(2)

分岐点 1 と合流点 2 での圧力差は，本管とバイパス管で等しいので，式(1)と(2)を等しいとすることにより，本管の流速 u_1，バイパス管の流速 u_2 との比は

$$\frac{u_2}{u_1}=\left\{\frac{\lambda_1\left(L/D\right)}{\zeta_s+2\zeta_b+\lambda_2\left(L+2l\right)/d+\zeta_c}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

となり，流量比　Q_2/Q_1 は次のようになる。

$$\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{\left(\pi d^2/4\right)\cdot u_2}{\left(\pi D^2/4\right)\cdot u_1}=\left(\frac{d}{D}\right)^2\cdot\frac{u_2}{u_1}$$

$$=\left(\frac{0.15}{0.3}\right)^2\cdot\left\{\frac{0.02\left(50/0.3\right)}{1.5+2\times1.0+\dfrac{0.02\left(5+2\times1.5\right)}{0.15}+0.3}\right\}^{\frac{1}{2}}=0.065 \qquad \text{（答）}$$

6．内径 50mm の管路により，毎秒 0.19L の油を長さ $l=500\mathrm{m}$ 先の工場へ輸送している。油の粘度 $\mu=0.02\mathrm{Pa\cdot s}$，密度 $\rho=800\mathrm{kg/m^3}$ である。

この時の ①レイノルズ数，②管の中心での流速，③圧力勾配，④圧力損失，⑤壁面の剪断応力，⑥流れを維持するのに必要な動力を求めよ。

略解：流量は $Q=0.19\mathrm{L/s}=0.19\times10^{-3}\mathrm{m^3/s}$ となり，平均流速 u_m は次のようになる。

$$u_m=\frac{4Q}{\pi d^2}=\frac{4\times0.19\times10^{-3}}{3.14\times0.05^2}=9.68\times10^{-2}\mathrm{m/s}$$

①　レイノルズ数は，

$$Re=\frac{u_m d}{\nu}=\frac{\rho u_m d}{\mu}=\frac{800\times9.68\times10^{-2}\times0.05}{0.02}=193.6=194 \qquad \text{（答）}$$

②　管の中心での流速 u_{max} は，式 6－22 より

$$u_{max}=2u_m=2\times9.68\times10^{-2}=0.1936=0.19\mathrm{m/s} \qquad \text{（答）}$$

③　圧力勾配 $\Delta p/L$ は式 6－17 より

$$\frac{\Delta p}{L}=\frac{128\mu Q}{\pi d^4}=\frac{128\times 0.02\times 0.19\times 10^{-3}}{3.14\times 0.05^4}=24.78=24.8\mathrm{Pa/m}$$ （答）

④　$l=500\mathrm{m}$ での圧力損失 Δp は次のようになる。

$\Delta p=24.78\times 500=12392\mathrm{Pa}=12.4\mathrm{kPa}$　（答）

⑤　壁面での剪断応力 τ_{w} は式 6－21 より

$$\tau_{\mathrm{w}}=\frac{4\mu u_{\mathrm{m}}}{R}=\frac{4\times 0.02\times 9.68\times 10^{-2}}{0.025}=0.31\mathrm{Pa}$$ （答）

⑥　必要な動力 L_{p} は，圧力損失に流量を乗じて

$L_{\mathrm{p}}=\Delta pQ=12392\times 0.19\times 10^{-3}=2.354=2.35\mathrm{W}$　（答）

6章　巻末問題

1．円管内の流れにおいて，管摩擦係数や流量 Q が一定であれば，ある距離 L での(a)損失ヘッドは管の内径 d の 5 乗に反比例することを証明せよ。また，(b)管内径を x%増加させると，損失ヘッドは何%減少するか。

略解：(a)　平均速度は　$u=\dfrac{4Q}{\pi d^2}$　であるから，この式を下記のダルシイー・ワイズバッハの式 6－5 に代入すると

$$h=\lambda\frac{L}{d}\frac{u^2}{2g}=\lambda\frac{L}{2g}\frac{\left(4Q/\pi d^2\right)^2}{d}=\lambda\frac{L}{2g}\left(\frac{4Q^2}{\pi}\right)\frac{1}{d^5}$$

となり，管摩擦係数と流量が一定であれば　$h\propto\dfrac{1}{d^5}$　となる。（答）

(b)　上式を $h=K/d^5(K=\text{const.})$ として d で両辺を微分すると，

$$\frac{dh}{dd}=-5K\frac{1}{d^6}=-5\frac{h}{d}$$　より　$$\frac{dh}{h}=-5\frac{dd}{d}$$　であるから $x=100\dfrac{dd}{d}$ とおくと

$$100\frac{dh}{h}=-5\times100\frac{dd}{d}=-5x$$（%）となる。

よって $-5x$% で $5x$% の減少である。　　　（答）

2．原油(比重 0.85，粘度 0.49Pa･s)を，内径 600mm の円管で 5km 離れた土地に輸送する時の管摩擦損失を求めよ。但し，油の平均流速は 0.5m/s とする。標準気圧で 4℃の水の密度を 1000kg/m³ とする。

略解：レイノルズ数 Re を求め，流れの状態を調べてみる。

粘度　$\mu=0.49\mathrm{Pa\cdot s}$ であるから

レイノルズ数は　$Re=\dfrac{\rho ud}{\mu}=\dfrac{0.85\times1000\times0.5\times0.6}{0.49}=520$

となり，この値は臨界レイノルズ数 2300 より小さいから，流れは層流と考えられる。層流の場合，管摩擦係数は，式 6－25（$\lambda=\dfrac{64}{Re}$）から，

$$\lambda=\frac{64}{Re}=\frac{64}{520}=0.123$$　と求まる。

よって管摩擦損失は，式 6－5 から

$$\Delta p=\rho\lambda\frac{L}{d}\frac{u^2}{2}=0.85\times1000\times0.123\times\frac{5\times10^3\times0.5^2}{2\times0.6}$$
$$=108906\mathrm{Pa}=0.11\mathrm{MPa}$$

３．粘度 $\mu=0.383\mathrm{Pa\cdot s}$ の油が内径 $d=0.0254\mathrm{m}$，長さ 60m の水平管を流れている。圧力損失が 414000Pa とすると，このときの流量 Q はいくらか求めよ。また，流れの状態を推察してみよ。ただし，油の密度を 913kg/m^3 とする。

略解：層流を仮定して，式 6－17 から

$$Q=\frac{\pi d^4\Delta p}{128\mu L}=\frac{\pi\left(0.0254\mathrm{m}\right)^4\left(414000\mathrm{Pa}\right)}{128\times\left(0.383\mathrm{Pa\cdot s}\right)\times\left(60\mathrm{m}\right)}=1.8\times10^{-4}\,\mathrm{m^3/s}$$　（答）

次に，流れの状態（層流か乱流）を推察するために，レイノルズ数を計算する。

まず，平均流速は　$u=\dfrac{Q}{\dfrac{\pi}{4}d^2}=\dfrac{1.8\times10^{-4}\dfrac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s}}}{\dfrac{\pi}{4}\left(0.0254\mathrm{m}\right)^2}=0.36\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

となり，レイノルズ数は　$Re=\dfrac{ud\rho}{\mu}$　より

各々の値を代入して，$Re=\dfrac{0.36\mathrm{m}\times0.0254\mathrm{m}\times913\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}}{0.383\mathrm{Pa\cdot s}}=21.8$　となる。

レイノルズ数が 2300 より小さいから，流れは層流で，式 6－17 を使用できることを確認した。

別解：圧力損失が与えられて，流量を求める問題であるから図 6－14 に沿って計算を行う。

まず，$\lambda=3$を仮定して，式 6－5 から平均流速を求めると

$$u=\sqrt{2\frac{d}{\lambda}\frac{\Delta p}{\rho L}}=\sqrt{2\frac{0.0254\mathrm{m}}{3}\frac{414000\mathrm{Pa}}{913\mathrm{kg/m^3}\times60\mathrm{m}}}=0.358\mathrm{m/s}$$

となる。レイノルズ数は

$$Re=\frac{\rho ud}{\mu}=\frac{913\times0.358\times0.0254}{0.383}=21.7$$

となる。管摩擦係数を求めると，$\lambda=63/Re=63/21.7=2.9$となり仮定した管摩擦係数と違うので以上を繰り返す。

$$u=\sqrt{2\frac{d}{\lambda}\frac{\Delta p}{\rho L}}=\sqrt{2\frac{0.0254\mathrm{m}}{2.9}\frac{414000\mathrm{Pa}}{913\mathrm{kg/m^3}\times60\mathrm{m}}}=0.364\mathrm{m/s}$$

$$Re=\frac{\rho ud}{\mu}=\frac{913\times0.364\times0.0254}{0.383}=22.0$$

管摩擦係数を求めると，$\lambda=63/Re=63/22=2.9$となり収束した。

流量は

$Q=u\dfrac{\pi}{4}d^2=0.364\times\dfrac{3.14}{4}\times0.0254^2=1.8\times10^{-4}\mathrm{m^3/s}$　となり一致する。

4．図１のようにポンプにより湖から丘の上のタンクに，水を流量 0.030m³/s で搬送する。使用する市販鋼管（$\varepsilon = 0.045\text{mm}$）は直径 80mm で，長さ 200m である。水を搬送するために要求される水動力(水がポンプから受け取った単位時間当たりの仕事)を計算せよ。ただし，水の動粘度は$\nu = 1.12\times10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}$，密度 ρ は 1000kg/m³ とし，水面差 H_a は 50m とする。

略解：ポンプの全揚程 H_t は，ドリル問題６－５の問題５より次式で与えられる。

$$H_\text{t} = H_\text{a} = \frac{u^2}{2g} + \lambda\frac{L}{d}\frac{u^2}{2g}$$

である。

ここで，H_a は水面差，u は平均流速，λ は管摩擦係数，L は管路の長さ，d は管内径である。

平均流速 u は，Q を流量,流路面積を A とすると

$$u = \frac{Q}{A} = \frac{0.030\dfrac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\dfrac{\pi}{4}(0.08\text{m})^2} = 5.97\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

次に，レイノルズ数を求める。

$$Re = \frac{ud}{\nu} = \frac{5.97\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\times0.08\text{m}}{1.12\times10^{-6}\dfrac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 4.26\times10^5$$

$Re = 4.26\times10^5 \geqq 2300$ であるから，乱流である。

$\varepsilon = 0.045\text{mm}$ であるから相対粗さは，

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0.045\times10^{-3}\text{m}}{0.08\text{m}} = 0.00056$$

である。ムーディ線図から $\lambda \fallingdotseq 0.018$ となる。ポンプの全揚程は，

$$H_\text{t} = 50\text{m} + \frac{\left(5.97\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\times9.8\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} + 0.018\times\frac{200\text{m}}{0.08\text{m}}\times\frac{\left(5.97\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\times9.8\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$= 50\text{m} + 1.82\text{m} + 81.8\text{m} = 133.6\text{m}$$

である。

水動力は

$$\rho g Q H_\text{t} = 1000\text{kg/m}^3\times9.8\text{m/s}^2\times0.030\text{m}^3/\text{s}\times133.6\text{m} = 39278.4\text{J/s} = 39\text{kJ/s}$$

となる。