「流体力学」　第５章　問題の解答

５－１　ドリル問題

問題１　運動量理論は，どのような法則を流体に適用することにより得られる理論であるか。

略解：ニュートンの運動の第二法則　　　（答）

問題２　質量に速度を乗じて得られる物理量名を答えよ。

略解：運動量　　　（答）

問題３　ある物体の運動量の時間により変化する割合を何というか。

略解：運動量変化率　　　（答）

問題４　式 5－2 はどのような保存則を表しているか。

略解：運動量保存則　　　（答）

問題５　質量 1000kg の自動車が速度 27.8m/s（100km/h）で水平な道路を走行している。この自動車の速度が 2.0 秒間で 33.3m/s（120km/h）になったとき，この自動車の走行方向に働いた力 F を求めよ。

略解：式 5－2 より，　$F = \dfrac{1000\mathrm{kg} \times (33.3 - 27.8)\mathrm{m/s}}{2.0} = 2.8\,\mathrm{k\,N}$　　　（答）

問題６　質量 1000kg の自動車が速度 27.8m/s（100km/h）で水平な道路を走行している。この自動車の速度が 4.0 秒間で 22.2m/s（80km/h）になったとき，この自動車の走行方向に働いた力 F を求めよ。

略解：式 5－2 より，　$F = \dfrac{1000 \times (22.2 - 27.8)}{4.0} = -1.4\,\mathrm{k\,N}$　　　（答）

問題７　式 5－14 では，何から流体にかかる力を求めることができると述べているのか。

略解：質量流量と対象とする流体が流れている領域の入口，出口の流体の速度　　　（答）

問題８　図 5－1 において，$m = 10\,\mathrm{kg/s}$，$u_1 = 1.0\mathrm{m/s}$，$u_2 = 3.0\,\mathrm{m/s}$ として外部から流体に加えられた力 F を求めよ。また，その方向も示せ。

略解：式 5－14 より，

$$F = m(u_2 - u_1) = 10\mathrm{kg/s} \times (3.0 - 1.0)\mathrm{m/s} = 20\mathrm{N}$$

x 軸の正方向　　　（答）

問題９　図５－１において，$u_1 = 2.0\,\mathrm{m/s}$，$u_2 = 5.0\,\mathrm{m/s}$ として外部から流体に加えられた力 F を求めよ。また，その方向も示せ。なお，流量 Q は $5.0 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^3/s}$，流体の密度は $900\,\mathrm{kg/m^3}$ とする。

略解：式５－14 より

$$F = \rho Q(u_2 - u_1) = 900\mathrm{kg/m^3} \times 5.0 \times 10^{-4}\mathrm{m^3/s} \times (5.0 - 2.0)\mathrm{m/s} = 1.4\ \mathrm{N}$$

x 軸の正方向　　　（答）

問題 10　図５－１において，$u_1 = 2.0\,\mathrm{m/s}$，$u_2 = 2.0\,\mathrm{m/s}$ として外部から流体に加えられた力 F を求めよ。また，その方向も示せ。なお，流量 Q は $6.0 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^3/s}$，流体の比重は 0.86 とする。

略解：式５－14 より，

$$F = \rho Q(u_2 - u_1)$$
$$= 0.86 \cdot 1000\mathrm{kg/m^3} \times 6.0 \times 10^{-4}\mathrm{m^3/s} \times (3.0 - 2.0)\mathrm{m/s} = 0.52\ \mathrm{N}$$

x 軸の正方向　　　（答）

５－２　ドリル問題

問題１　図５－２に示した狭まり管内をある液体が流れている。$A_1 = 1.13 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$，$A_2 = 2.82 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2}$，$u_1 = 2.0\,\mathrm{m/s}$，$u_2 = 8.0\,\mathrm{m/s}$，質量流量を 0.18kg/s，$p_1 = 0.124\mathrm{MPa}$，$p_2 = 0.1\mathrm{MPa}$ であるとき，液体がこの狭まり管におよぼす力 f を求めよ。また，その方向はどちらの方向か。

略解：式５－16 より

$$f = 1.13 \times 10^{-4} \times 0.124 \times 10^6 - 2.82 \times 10^{-5} \times 0.1 \times 10^6 - 0.18 \times (8.0 - 2.0) = 10\ \mathrm{N}$$

図の右方向　　　（答）

問題２　図５－2 に示した狭まり管内をある密度 ρ のある液体が流量 Q で流れている。断面 1 および 2 の断面積をそれぞれ A_1，A_2，断面 1 および 2 の圧力をそれぞれ p_1，p_2，とするとき，液体がこの狭まり管におよぼす力 f を求めよ。

略解：$m = \rho Q$，$u_1 = \dfrac{Q}{A_1}$，$u_2 = \dfrac{Q}{A_2}$ と式５－16 より f を求める。

$$f = A_1 \cdot p_1 - A_2 \cdot p_2 - \rho Q^2 \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right)$$　　　（答）

問題３　図５－3 に示した平板において，質量流量が 98.2kg/s あるとき，平板にかかる力 f を求めよ。また，その方向は平板を押す方向かあるいは引く方向か答えよ。なお，噴出する流体の速度は 50m/s とする。

略解：式５－19 より

$f = mu = 98.2 \times 50 = 4.91 \times 10^3\,\mathrm{N} = 4.9\,\mathrm{kN}$　平板を押す方向（答）

問題４　図 5－3 に示した平板において，平板が受ける力 f を求めよ。また，その方向は平板を押す方向かあるいは引く方向か答えよ。なお，流体は水（$\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$）とし，ノズル直径 60mm，ノズルから噴出する流体の速度は 40m/s とする。

略解：式 5－19 より

$$f = mu = \rho Q u = 1000\mathrm{kg/m^3} \times \left(30\times10^{-3}\mathrm{m}\right)^2 \pi \cdot 40\mathrm{m/s} \times 40\mathrm{m/s} = 4.5\,\mathrm{kN}$$

平板を押す方向　　　（答）

問題５　図 5－3 に示した平板が噴流の方向に速度 10m/s で動いているとき，平板にかかる力 f を求めよ。なお，流体は水（$\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$）とし，噴出する水の速度は 50m/s，噴流の断面積は $1.96\times10^{-3}\mathrm{m}^2$ とする。

略解：式 5－30 で，$\theta = 90°$ として

$$f = \rho A(u-U)^2 \sin\theta = 1000\mathrm{kg/m^3} \times 1.96\times10^{-3}\mathrm{m}^2 \times (50\mathrm{m/s} - 10\mathrm{m/s})^2$$
$$= 3.14\times10^3\,\mathrm{N} = 3.1\mathrm{kN}$$　　（答）

問題６　図 5－4 に示した平板において，平板の角度 $\theta = 45°$ で質量流量が 98.2kg/s あるとき，平板にかかる力 f を求めよ。また，その方向は平板を押す方向かあるいは引く方向か答えよ。なお，噴出する流体の速度は 50m/s とする。

略解：式 5－23 より

$$f = mu\sin\theta = 98.2\times50\times\sin45° = 3.472\times10^3\,\mathrm{N} = 3.5\,\mathrm{kN}$$

平板を押す方向　　　（答）

問題７　図 5－9 に示したジェット推進により駆動される容器において，ノズルからの流出する流体の速度 $u = 4.5\,\mathrm{m/s}$，質量流量が 6.0kg/s であるとき，容器の推進力 f を求めよ。また，その推進力はどちらの方向に働くか答えよ。

略解：式 5－33 より

$f = -mu = -4.5\times6 = -27\,\mathrm{N}$　図の左方向　　　（答）

問題８　図 5－9 に示したジェット推進により駆動される容器において，ノズルの断面積を A，ノズルから噴出する液体の密度および流量をそれぞれ ρ，Q とするとき，容器の推進力 f を求めよ。

略解：$m = \rho Q$，$u = \dfrac{Q}{A}$ と式 5－33 より f を求める。

$$f = -mu = -\frac{\rho Q^2}{A}$$　　（答）

問題９　式 5－36 を導出せよ。

略解：式 5－33 から 5－35 より

$$f=-mu=-\rho Qu=-\rho Au^2=-\rho A\left(\sqrt{2gh}\right)^2=-2\rho ghA \qquad \text{（答）}$$

問題 10　図 5－9 に示したジェット推進により駆動される容器に働く推進力 f を求めよ。また，その推進力はどちらの方向に働くか答えよ。なお，流体は水（ $\rho=1000\,\mathrm{kg/m^3}$ ）とし，$h=1.0\,\mathrm{m}$，ノズルの内径は 60mm とする。

略解：式 5－36 より

$$f=-2\rho ghA$$
$$=-2\times1000\mathrm{kg/m^3}\times9.8\mathrm{m/s^2}\times1\mathrm{m}\times\left(30\times10^{-3}\mathrm{m}\right)^2\pi=-55\,\mathrm{N}$$

図の左方向　　　　（答）

５－３　ドリル問題

問題１　式 5－39，5－40 が成り立つためには Δt が微小時間であるという条件が必要である。Δt が微小時間ではないとしたら，どのような問題点が生じるか簡潔に述べよ。

略解：Δt が微小時間ではない場合，図５－１１の l_{AE} と l_{BF}，あるいは，l_{DH} と l_{CG} が等しくなくなる。その結果，ABFE および DCGH 内の流体の質量を求めることが不可能となり，以後の論理展開ができなくなる。

問題２　式 5－50 および式 5－52 を導け。

略解：cos，sin の定義より，以下の通り導くことができる。

$$\cos\theta_1=\frac{u_1}{q_1}\ \text{より}\ u_1=q_1\cos\theta_1$$

$$\sin\theta_1=\frac{v_1}{q_1}\ \text{より}\ v_1=q_1\sin\theta_1$$

問題３　図 5－15 に示した曲管内をある流体が流れている。$A_1=A_2=A$，$\theta_1=0°$，$\theta_2=90°$，$p_1=p_2=p$ であるとき，流体がこの曲管におよぼす力 x 方向の力 f_x および y 方向の力 f_y を求めよ。ただし，断面１の x 方向の流体の速度は u_1，断面 2 の y 方向の流体の速度は v_2，質量流量は m とする。

略解：式 5－58 および式 5－59 より

$$f_x=pA+mu_1$$

$$f_y=-pA-mv_1 \qquad \text{（答）}$$

問題４　問３で $p=0.10\,\mathrm{kPa}$， $m=0.50\,\mathrm{kg/s}$， $A=3.14\times10^{-2}\,\mathrm{m}^2$， $\rho=1000\,\mathrm{kg/m}^3$ のとき，流体が，この曲管におよぼす力の x 方向の力 f_x および y 方向の力 f_y を求めよ。

略解：

質量流量と体積流量 Q の関係より， $m=\rho Q$

体積流量と流体の速度 u との関係は $Q=Au$

よって，

$$u_1=\frac{m}{\rho A}=\frac{0.5\mathrm{kg/s}}{1000\mathrm{kg/m^3}\times3.14\times10^{-2}}=1.6\times10^{-2}\mathrm{m/s}=v_2$$

（断面積，質量流量が等しいので）

問題３の結果より

$$f_x=PA+mu_1=0.1\times10^3\,\mathrm{Pa}\times3.14\times10^{-2}\,\mathrm{m}^2+0.5\mathrm{kg/s}\times1.6\times10^{-2}\,\mathrm{m/s}$$

$=3.1\mathrm{N}$　　（答）

$$f_y=-PA-mv_2=-0.1\times10^3\,\mathrm{Pa}\times3.14\times10^{-2}\mathrm{m}^2-0.5\,\mathrm{kg/s}\times1.6\times10^{-2}\mathrm{m}^2$$

$=-3.1\mathrm{N}$　　（答）

問題５　図５－15に示した曲管内を水が流れている。$A_1=A_2=3.14\times10^{-2}\,\mathrm{m}^2$，$\theta_1=0°$，$\theta_2=60°$，$Q=0.010\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$， $p_1=p_2=5.0\,\mathrm{kPa}$ であるとき，水がこの曲管におよぼす力 x 方向の力 f_x および y 方向の力 f_y を求めよ。また，それらの力の合力 f とその方向 α を求めよ。ただし，密度は $1000\mathrm{kg/m}^3$ とする。

略解：

断面積が等しいことより， $q_1=q_2\equiv q$

流量，断面積および流速との関係より

$$q=\frac{Q}{A}=\frac{0.01\mathrm{m}^3/\mathrm{s}}{3.14\times10^{-2}\mathrm{m}^2}=0.318\mathrm{m/s}$$

式５－50～式５－53 より

$$u_1=0.318\mathrm{m/s},\quad u_2=0.159\,\mathrm{m/s},\quad v_1=0,\quad v_2=0.275\mathrm{m/s}$$

式５－58 および式５－59 より

$$f_x=p_1A_1\cos\theta_1-p_2A_2\cos\theta_2-m\left(u_2-u_1\right)$$

$$=5.0\times10^3\,\mathrm{Pa}\times3.14\times10^{-2}\,\mathrm{m}^2\times\left(1-0.5\right)-10^3\,\mathrm{kg/m}^3\times0.01\mathrm{m}^3/\mathrm{s}\times(0.16-0.32)$$

$=80\mathrm{N}$　　（答）

$$f_y=p_1A_1\sin\theta_1-p_2A_2\sin\theta_2-m\left(v_2-v_1\right)$$

$$=-5.0\times10^3\mathrm{Pa}\times3.14\times10^{-2}\mathrm{m}^2\times0.87-10^3\mathrm{kg/m}^3\times0.01\mathrm{m}^3/\mathrm{s}\times(0.28-0)\mathrm{m/s}$$

$=-139\mathrm{N}$　　（答）

式５－60，式５－61 より

$$f=\sqrt{f_x{}^2+f_y{}^2}=160\,\mathrm{N}\qquad\alpha=\tan^{-1}\frac{f_y}{f_x}=-60.1°$$　　（答）

問題６　図５－17 で示される曲板において，流れている流体の密度が 2 倍になった場合，その曲板にかかる x 方向の力 f_x は何倍になるか。

略解：式５－66 より

$$f_x = mu\left(1-\cos\theta\right) = \rho Qu\ \left(1-\cos\theta\right)$$

ここで，密度が 2 倍になったときの曲板にかかる力を f_x* とすると，この f_x* は以下の式で表すことができる。

$$f_x{}^* = 2\rho Qu\ \left(1-\cos\theta\right) = 2f_x$$

よって，2 倍となる。

問題７　図５－17 に示した曲板において，質量流量が 10kg/s であるとき，この曲板にかかる x 方向の力 f_x および y 方向の力 f_y を求めよ。ただし，流体は水とし，噴出する水の速度は 15m/s，角度は 30° とする。

略解：式５－66，式５－67 より

$$f_x = mu\ \left(1-\cos\theta\right) = 10\mathrm{kg/s}\times15\mathrm{m/s}\times\left(1-0.87\right) = 19.5\mathrm{N} \qquad \text{（答）}$$

$$f_y = -mu\sin\theta = -10\mathrm{kg/s}\times15\mathrm{m/s}\times0.5 = -75\mathrm{N} \qquad \text{（答）}$$

問題８　問題 7 において，角度が 90° であった場合，曲板にかかる x 方向の力 f_x および y 方向の力 f_y を求めよ。

略解：式５－66，式５－67 より

$$f_x = mu\left(1-\cos\theta\right) = mu = 10\mathrm{kg/s}\times15\mathrm{m/s} = 150\mathrm{N} \qquad \text{（答）}$$

$$f_y = -mu\sin\theta = -10\mathrm{kg/s}\times15\mathrm{m/s}\times1.0 = -150\mathrm{N} \qquad \text{（答）}$$

問題９　問題 7 において，角度が 180° となった場合，この曲板にかかる x 方向の力 f_x および y 方向の力 f_y を求めよ。

略解：式５－66，式５－67 より

$$f_x = mu\ \left(1-\cos\theta\right) = 10\cdot15\left\{1-\left(-1\right)\right\} = 300\mathrm{N}$$

$$f_y = -mu\sin\theta = 0\mathrm{N}$$

問題 10　問題 7 において，曲板が速度$U = 8.0\,\mathrm{m/s}$で動いているとき，この曲板にかかるx方向の力f_xおよびy方向の力f_yを求めよ。ただし，ノズルの直径を$4.0\times10^{-2}\,\mathrm{m}$，流体の密度を$1000\mathrm{kg/m^3}$とする。

略解：

ノズルの断面積Aを求めると$A = (\pi/4)\times\left(4\times10^{-2}\right)^2 = 1.26\times10^{-3}\,\mathrm{m^2}$

よって，式 5－70 および式 5－71 より

$$f_x = \rho A(u-U)^2(1-\cos\theta) = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}\times1.26\times10^{-3}\cdot(15-8)^2\cdot(1-0.87)$$
$$= 8.03\mathrm{N} \qquad (答)$$

$$f_y = -\rho A(u-U)^2\sin\theta = -10^3\,\mathrm{kg/m^3}\times1.26\times10^{-3}\,\mathrm{m^2}\times(15-8)^2\,\mathrm{m^2/s}\times0.5$$
$$= -30.9\mathrm{N} \qquad (答)$$

5 章 演習問題

1．質量 2000kg の自動車が速度 60km/h で水平な道路を走行している。この自動車が 5 秒間で止まるためには，この間に自動車に与える力 F を求めよ。

略解：$60\mathrm{km/h} = \dfrac{60\cdot10^3}{3600} = 16.7\mathrm{m/s}$

式 5－2 より，$F = \dfrac{2000\times(0-16.7)}{5.0} = -6.68\mathrm{kN}$　　（答）

2．図 5－1 において，外部から流体に加えられた力 F とその方向を求めよ。なお，流量 Q は $10^{-3}\mathrm{m^3/s}$，流体の比重は 1.0，断面 AB の面積 $A_1 = 7.86\times10^{-3}\mathrm{m^2}$，$A_2 = 3.14\times10^{-4}\mathrm{m^2}$

略解：$Q = A_1\cdot u_1$より　$u_1 = \dfrac{Q}{A_1} = \dfrac{10^{-3}}{7.86\times10^{-3}} = 0.127\mathrm{m/s}$

連続の式　$A_1\cdot u_1 = A_2\cdot u_2$　より

$$u_2 = \frac{A_1}{A_2}\cdot u_1 = \frac{7.86\times10^{-3}}{3.14\times10^{-4}}0.127 = 3.18\mathrm{m/s}$$

式 5－14 より，

$$F = \rho Q(u_2 - u_1) = 1000\cdot10^{-3}(3.18-0.127) = 3.05\ \mathrm{N} \qquad (答)$$

図の右方向

３．図 5－2 に示した狭まり管内を比重 1.2 の液体が流れている。
$A_1 = 0.196\text{m}^2$， $A_2 = 4.9\times10^{-2}\text{m}^2$， $u_1 = 0.50\text{m/s}$， $u_2 = 2.0\text{m/s}$， $p_2 = 2.0\text{kPa}$ であるとき，以下の問に答えよ。

⑴　断面 1 の圧力 p_1 を求めよ。

⑵　質量流量 m を求めよ。

⑶　液体がこの狭まり管におよぼす力 f を求めよ。また，その方向はどちらか。

略解：

⑴　ベルヌーイの式　$\dfrac{u_1{}^2}{2} + \dfrac{p_1}{\rho} = \dfrac{u_2{}^2}{2} + \dfrac{p_2}{\rho}$　より

$$p_1 = \frac{\rho}{2}\left(u_2{}^2 - u_1{}^2\right) + p_2$$

$$= \frac{1200}{2}(2^2 - 0.5^2) + 2\times10^3 = 4.25\times10^3\text{Pa} = 4.25\text{kPa}$$　（答）

⑵　$Q = A_1u_1 = A_2u_2$ より $Q = 9.8\times10^{-2}\text{m}^3/\text{s}$，　$m = \rho Q$ より $m = 1.18\times10^2\text{kg/s}$　（答）

⑶　式 5－16 より

$$f = 0.196\cdot4.25\times10^3 - 4.9\times10^{-2}\cdot2\times10^3 - 1.18\times10^2\left(2 - 0.5\right)$$

$$= 5.58\times10^2\ \text{N}$$　（答）

図の右方向

４．図 5－4 に示した平板に作用する力 f が最大となるときの平板の角度 θ を求めよ。

略解：式 5－23 より，平板に作用する力 f は以下のように表すことができる。

$$f = mu\sin\theta$$

ここで, 平板に作用する力 f が最大となるときの平板の角度 θ は 90° である。　（答）

５．図 5－3 に示した平板に 50N の力 f が作用している。このとき，ノズルから流出する流体の速度 u を求めよ。なお，流体の密度は 1100kg/m³，ノズルの内径は 50mm とする。

略解：　式 5－19 より，$f = mu = \rho Qu = \rho Au^2$。

よって，

$$u = \sqrt{\frac{f}{\rho A}} = \sqrt{\frac{50}{1100\cdot0.025^2\pi}} = 4.81\text{m/s}$$

6．図 5－9 に示したジェット推進により駆動される容器に働く力の大きさを 150N としたい。このとき，容器の水（比重１）の水深 h をどのような値にするべきか求めよ。ただし，ノズルの内径を 80mm とする。

略解：式 5－36 より，$f=-2\rho ghA$ である。よって，f の方向は左方向であるから $f=-150\,\mathrm{N}$ を代入して，

$$h=-\frac{f}{2\rho gA}=-\frac{-150}{2\cdot 1000\cdot 9.8\cdot 0.04^2\pi}=1.52\mathrm{m}\qquad（答）$$

7．図 5－21 に示した直角に曲がる管路を流体が質量流量 m で流れている。この時，断面 1 から 2 の間の流体から管が受ける x 方向の力 f_x，y 方向の力 f_y をそれぞれ求めよ。ただし，断面 1，2 の流速をそれぞれ u_1，v_2，圧力をそれぞれ p_1，p_2，管路の断面積をそれぞれ A_1，A_2 とする。なお，この管は水平面内に設置されており，流体は理想流体とする。

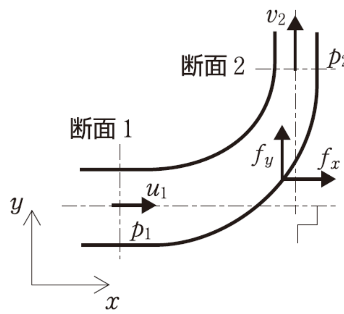

図 5－21
90° の曲管

略解：　式 5－58，5－59 より

$$f_x=m\cdot u_1+p_1\cdot A_1$$

$$f_y=-m\cdot v_1-p_2\cdot A_2\qquad（答）$$

8．図 5－22 のように管出口の流出角が 30° の曲管内を液体（比重 0.85）が流れている。このとき，以下の問に答えよ。ただし，流量を $2.0\times10^{-2}\mathrm{m^3/s}$，断面 1 における流体の速度 q_1 を 2.0m/s，断面 2 における流体の速度 q_2 を 4.0m/s，断面 1 での圧力を 7.0kPa とする。なお，この管は水平面内に設置されており，流体は理想流体とする。

⑴　断面 2 の圧力 p_2 を求めよ。
⑵　この曲管にかかる x 方向の力 f_x を求めよ。
⑶　この曲管にかかる y 方向の f_y を求めよ。
⑷　曲管にかかる力の合力の大きさ f とその方向 α を求めよ。

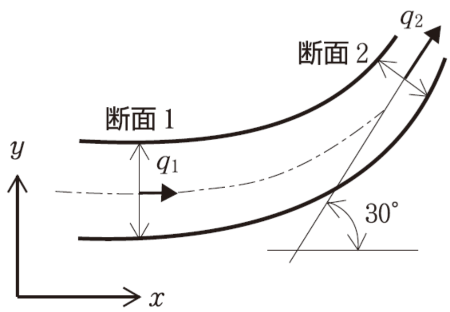

図 5－22
曲管が受ける力

略解：

⑴　ベルヌーイの式 $\dfrac{q_1{}^2}{2}+\dfrac{p_1}{\rho}=\dfrac{q_2{}^2}{2}+\dfrac{p_2}{\rho}$ より

$$p_2=\frac{\rho}{2}\left(q_1{}^2-q_2{}^2\right)+p_1=\frac{850}{2}\left(2^2-4^2\right)+7\times10^3=1900\,\mathrm{Pa}=1.9\mathrm{kPa}$$

⑵　$Q=Aq$ より

$$A_1=\frac{2\times10^{-2}}{2}=10^{-2}\mathrm{m^2}\qquad A_2=\frac{2\times10^{-2}}{4}=0.5\times10^{-2}\mathrm{m^2}$$

式 5－58 より

$$f_x = p_1 A_1 \cos\theta_1 - p_2 A_2 \cos\theta_2 - m\left(u_2 - u_1\right)$$

$$= 7\times10^3 \cdot 10^{-2} - 1.9\times10^3 \cdot 0.5\times10^{-2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 850 \cdot 2\times10^{-2}\left(4\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right) = 36.9\mathrm{N}$$

⑶　式 5－59 より

$$f_y = p_1 A_1 \sin\theta_1 - p_2 A_2 \sin\theta_2 - m\left(v_2 - v_1\right)$$

$$= -1.9\times10^3 \cdot 0.5\times10^{-2} \cdot \frac{1}{2} - 850 \cdot 2\times10^{-2}\left(4\frac{1}{2} - 0\right) = -38.8\mathrm{N}$$

⑷　$f = \sqrt{36.9^2 + (-38.8)^2} = 53.5\mathrm{N}$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{-38.8}{36.9} = -46.4°$$

9．図 5－17 に示した曲板において，流量が $2.0\times10^{-3}\mathrm{m^3/s}$ であるとき，この曲板にかかる x 方向の力 f_x および y 方向の力 f_y を求めよ。また，この曲板にかかる力の合力の大きさ f とその方向 α を求めよ。ただし，流体の比重は 1.1，噴出する水の速度は 20m/s，角度は 45° とする。

略解：式 5－66，式 5－67 より

$$f_x = m u\left(1 - \cos\theta\right) = 1.1\times10^3 \cdot 2.0\times10^{-3} \cdot 20\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 12.9\mathrm{N}$$

$$f_y = -m u \sin\theta = -1.1\times10^3 \cdot 2.0\times10^{-3} \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -31.1\mathrm{N}$$

$$f = \sqrt{12.9^2 + (-31.1)^2} = 33.7\mathrm{N}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{-31.1}{12.9} = -67.5°$$

10．図 5－19 に示した曲板において，ノズルから噴出する水の質量流量が 5.0kg/s，この曲板にかかる x 方向の力 f_x が 2.0N であるとき，この曲板が動いている速度 U を求めよ。ただし，噴出する水の速度は 5.0m/s，角度は 45° とする。

略解：

$m = \rho Q = \rho A u$，式 5－70　$f_x = \rho A\left(u - U\right)^2\left(1 - \cos\theta\right)$ より

$$\left(u - U\right)^2 = \frac{f_x}{\rho A\left(1 - \cos\theta\right)} = \frac{f_x}{\rho\dfrac{m}{\rho u}\left(1 - \cos\theta\right)} = \frac{f_x \cdot u}{m\left(1 - \cos\theta\right)} = \frac{2 \cdot 5}{5\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 6.83$$

$U = 2.39\ \mathrm{m/s}$

５章　巻末問題

１．図１において，断面Ａ－Ｂの内径が 200mm，断面Ｃ－Ｄの内径が 100mm であるとき，外部から流体に加えられた力 F を求めよ。また，その方向はどちらの方向か。なお，流量 Q は 120L/min，流体の比重は 1.0 とする。

略解：

$$Q = 120\mathrm{L/min} = \frac{120 \cdot 10^{-3}}{60} = 2.0\times10^{-3}\,\mathrm{m^3/s}$$

$$Q = A_1 \cdot u_1 \text{より，}\quad u_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{2.0\times10^{-3}}{0.1^2\pi} = 6.37\times10^{-2}\,\mathrm{m/s}$$

連続の式　$A_1 \cdot u_1 = A_2 \cdot u_2$ より

$$u_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot u_1 = \frac{0.1^2\pi}{0.05^2\pi} 6.37\times10^{-2} = 2^2 \cdot 6.37\times10^{-2} = 0.255\,\mathrm{m/s}$$

式５－14 より，

$$F = \rho Q\left(u_2 - u_1\right) = 1000 \cdot 2.0\times10^{-3}\left(0.255 - 6.37\times10^{-2}\right) = 0.383\ \mathrm{N}$$

図の右方向

２．図２に示すように狭まり管内を水が流れている。$d_1 = 120\mathrm{mm}$，$d_2 = 80\mathrm{mm}$，$u_2 = 8.0\mathrm{m/s}$，$p_1 = 50\,\mathrm{kPa}$，密度 $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ であるとき，以下の問に答えよ。

⑴　断面１の流速 u_1 を求めよ。

⑵　断面２の圧力 p_2 を求めよ。

⑶　質量流量 m を求めよ。

⑷　水がこの狭まり管におよぼす力 f を求めよ。また，その方向はどちらの方向か。

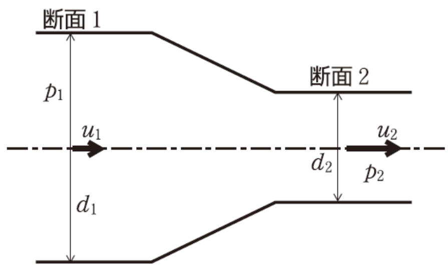

図２　狭まり管

略解：

⑴　連続の式　$A_1u_1 = A_2u_2$ より

$$u_1 = \frac{A_2}{A_1}u_2 = \frac{\left(40\times10^{-3}\right)^2\pi}{\left(60\times10^{-3}\right)^2\pi} 8.0\mathrm{m/s} = 3.6\mathrm{m/s} \qquad \text{（答）}$$

⑵　ベルヌーイの式　$\dfrac{u_1^{\,2}}{2} + \dfrac{p_1}{\rho} = \dfrac{u_2^{\,2}}{2} + \dfrac{p_2^{\,2}}{\rho}$　より

$$p_2 = \frac{\rho}{2}\left(u_1^{\,2} - u_2^{\,2}\right) + p_1$$

$$= \frac{1000\mathrm{kg/m^3}}{2}(3.6^2 - 8.0^2) + 5\times10^4\,\mathrm{Pa}$$

$$= 2.45\times10^4\,\mathrm{Pa} = 25\mathrm{kPa} \qquad \text{（答）}$$

⑶　$m = \rho Q = \rho A_2 v_2 = 1000\text{kg/m}^3 \times \left(40\times10^{-3}\right)^2 \pi\text{m}^2 \times 8.0\text{m/s} = 40\text{kg/s}$　　（答）

⑷　式 5－16 より

$$f = \left(60\times10^{-3}\right)^2 \pi \cdot 50\times10^3 - \left(40\times10^{-3}\right)^2 \pi \cdot 25\times10^3\text{Pa} - 40\text{kg/s}\times\left(8.0-3.6\right) = 264\text{ N}$$

図の右方向　　（答）

3．図 3 に示したように，円管の出口に取り付けられたノズルから，比重 0.9 の液体が，大気中に噴出している。以下の問いに答えよ。ただし，円管の内径は 0.20m，ノズル上流部の圧力 p_1 は 1.0kPa，$u_1 = 0.50\text{m/s}$ とする。

⑴　大気中に噴出している流体の速度 u_2 を求めよ。

⑵　質量流量 m を求めよ。

⑶　ノズルにかかる力 f_x とその方向を求めよ。

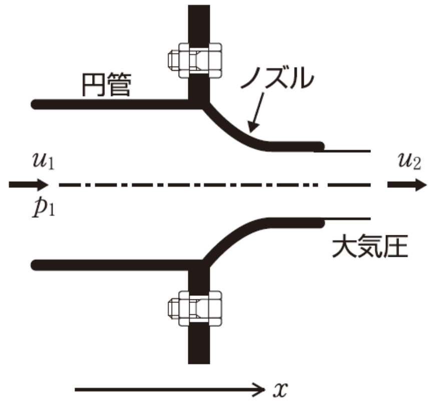

図 3　ノズル

略解：

⑴　ベルヌーイの式　$\dfrac{{u_1}^2}{2} + \dfrac{p_1}{\rho} = \dfrac{{u_2}^2}{2} + \dfrac{p_2}{\rho}$　より

$${u_2}^2 = {u_1}^2 + \frac{2p_1}{\rho} = 0.5^2 + \frac{2\cdot1000}{900} = 2.47$$

$$u_2 = 1.57\text{m/s}$$

⑵　$m = \rho Q$ より $m = 900\cdot0.1^2\pi\cdot0.5 = 14.1\text{kg/s}$

⑶　式 5－16 より

$$f_x = 0.1^2\pi\cdot10^3 - 14.1\left(1.57-0.5\right) = 16.3\text{ N}$$

x 軸に対して正方向

4．図 4 に示したように，水平面内の固体壁にばねを介した平板が取り付けられ，そこにノズルからの水の噴流が衝突しノズルからの流速 u と同じ流速で流出している。このとき以下の問に答えよ。なお，ノズルからの噴流の直径は 400mm とする。

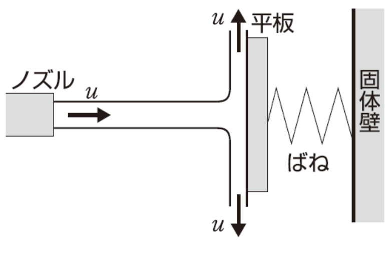

図 4
ばねを取り付けられた平板に衝突する噴流

⑴　噴流の流速 u が 5.0m/s のとき，質量流量 m を求めよ。

⑵　噴流の流速 u が 5.0m/s のとき，平板にかかる力 f を求めよ。

⑶　⑵で求めた力を平板が受けている場合，ばねのたわみ x を求めよ。ただし，ばね定数は 8.0×10^4 N/m とする。

⑷　ばねのたわみが 5.0×10^{-2} m となっている。このときの噴流の流速を求めよ。ただし，ばね定数は 8.0×10^4N/m とする。

略解：

⑴　$m = 1000\,\mathrm{kg/s} \cdot 0.2^2 \pi \mathrm{m}^2 \cdot 5\,\mathrm{m/s} = 628\,\mathrm{kg/s}$　（答）

⑵　式 5－19 より $f = 628\mathrm{kg/s} \cdot 5\mathrm{m/s} = 3.14 \times 10^3\,\mathrm{N}$　（答）

⑶　$x = \dfrac{f}{k} = \dfrac{3.14 \times 10^3\,\mathrm{N}}{8 \times 10^4\,\mathrm{N/m}} = 3.9 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}$　（答）

⑷　$f = kx$，$m = \rho A u$，式 5－19 より

$$kx = \rho A u^2$$

$$u = \sqrt{\frac{kx}{\rho A}} = \sqrt{\frac{8 \times 10^4\,\mathrm{N/m} \times 5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}}{1000\mathrm{kg/m}^3 \times 0.2^2 \pi \mathrm{m}^2}} = 5.6\mathrm{m/s}$$　（答）

5．図 5 のように，直径 150mm，流速 15m/s のノズルからの噴流が鉛直上方に噴出して質量 M の円錐状の物体に衝突して，その物体を一定の位置に保っている。このとき，以下の問に答えよ。ただし，流体の比重は 1.0 とする。また，水に対する重力の影響は無いものとする。

⑴　円錐に衝突する前の噴流の流量 Q および質量流量 m を求めよ。

⑵　噴流が円錐に及ぼす力 F を求めよ。

⑶　円錐の質量 M を求めよ。

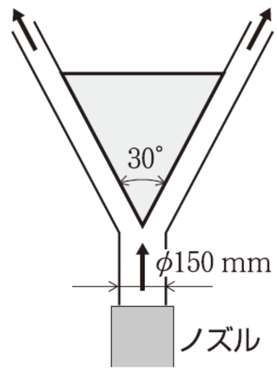

図 5
噴流中の円錐状物体

略解：

⑴　$Q = \left(\dfrac{150 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 \cdot \pi \cdot 15 = 0.265\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$

$m = \rho Q = 1000 \cdot 0.265 = 265\mathrm{kg/s}$　（答）

⑵　噴流が物体におよぼす力を f，噴流の流速を u，上方向を正とし，式 5－66 の x 方向を上方向に考えて運動量理論を適用すると

$$F = mu(1 - \cos\theta) = 265\mathrm{kg/s} \times 15\mathrm{m/s} \times (1 - \cos 15^\circ) = 135.4\,\mathrm{N}$$　（答）

⑶　円錐の重さと噴流が円錐に及ぼす力が等しいので，

$$Mg = F$$

$$M = \frac{F}{g} = \frac{135.4}{9.8} = 13.8\,\mathrm{kg}$$　（答）

6．図 6 に示したジェット推進により駆動される容器がある。この容器に作用する力の大きさが 60.0N のとき，この容器は動き出した。このとき，この容器中の液体（比重 1.0）の深さ h とノズルから流出する流体の速度 u および流量 Q を求めよ。なお，ノズルの内径は 50.0mm とする。

略解：式 5－36，$f=-2\rho ghA$ より

$$h=-\frac{f}{2\rho gA}=-\frac{-60}{2\cdot 1000\cdot 9.8\cdot\left(25\times 10^{-3}\right)^2\pi}=1.56\,\mathrm{m}\qquad（答）$$

式 5－34 より

$$u=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 9.8\cdot 1.56}=5.53\mathrm{m/s}\qquad（答）$$

$$Q=Au=(25\times 10^{-3})^2\pi\cdot 5.53=1.09\times 10^{-2}\mathrm{m^3/s}\qquad（答）$$

7．図 7 のように管出口の流出角が 45° の水平面内に設置された曲管内を水が流れている。この時，以下の問に答えよ。ただし，断面 1 での流速 q_1 を 1.0m/s，断面 2 での流速 q_2 を 3.2m/s，断面 1 における管内径を 400mm，断面 2 での圧力を 10kPa とする。

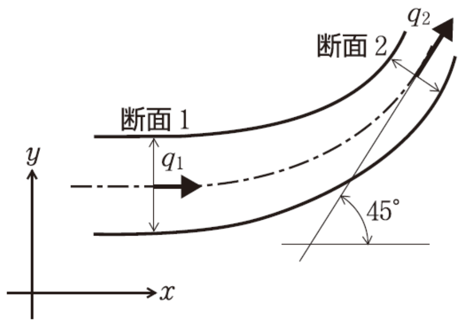

図 7
曲管が受ける力

⑴ 断面 1 の圧力 p_1 を求めよ。

⑵ 質量流量 m を求めよ。

⑶ この曲管にかかる x 方向の力 f_x を求めよ。

⑷ この曲管にかかる y 方向の f_y を求めよ。

⑸ 曲管にかかる力の合力の大きさ f とその方向 α を求めよ。

略解：

⑴ ベルヌーイの式 $\dfrac{q_1{}^2}{2}+\dfrac{p_1}{\rho}=\dfrac{q_2{}^2}{2}+\dfrac{p_2}{\rho}$ より

$$p_1=\frac{\rho}{2}\left(q_2{}^2-q_1{}^2\right)+p_2=\frac{1000\mathrm{kg/m^3}}{2}\left(3.2^2-1^2\right)+10\times 10^3$$
$$=14620\mathrm{Pa}=14.6\mathrm{kPa}\qquad（答）$$

⑵ $m=\rho Q=1000\mathrm{kg/m^3}\times 1.0\mathrm{m/s}\times 0.2^2\pi\mathrm{m^2}=126\mathrm{kg/s}$ （答）

⑶ 連続の式 $A_1q_1=A_2q_2$ より

$$A_2=A_1\frac{q_1}{q_2}=0.2^2\pi\mathrm{m^2}\times\frac{1}{3.2}=3.9\times 10^{-2}\mathrm{m^2}$$

式 5－58 より

$$f_x = p_1 A_1 \cos\theta_1 - p_2 A_2 \cos\theta_2 - m\,(u_2 - u_1)$$

$$= 14.6\times10^3\,\mathrm{Pa}\times12.6\times10^{-2}\,\mathrm{m}^2$$

$$-10\times10^3\,\mathrm{Pa}\times3.9\times10^{-2}\,\mathrm{m}^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-126\left(3.2\frac{\sqrt{2}}{2}-1.0\right)$$

$$=1405\,\mathrm{N}=1.4\,\mathrm{kN}$$ （答）

⑷　式 5－59 より

$$f_y = p_1 A_1 \sin\theta_1 - p_2 A_2 \sin\theta_2 - m\,(v_2 - v_1)$$

$$=-10\times10^3\,\mathrm{Pa}\times3.9\times10^{-2}\,\mathrm{m}^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-126\left(3.2\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)=-560\mathrm{N}$$ （答）

⑸　$f=\sqrt{1405^2+(-560)^2}=1512\mathrm{N}$

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{-560}{1405}=-21.7^\circ$$ （答）

8．図 8 のようなU字部の物体を取り付けた台車にノズルからの水（密度 $\rho=1000\,\mathrm{kg/m^3}$）の噴流があたり 180° 噴流の方向が曲げられている。このとき以下の問に答えよ。なお，ノズルからの噴流の直径は 0.20m とし，水に対する重力の影響は無いものとする。

⑴　噴流の流速 u が 0.50m/s のとき，質量流量 m を求めよ。

⑵　噴流の流速 u が 0.50m/s のとき, 台車にかかる力 f_x を求めよ。

⑶　台車が動きだす際には 25N の力が必要となる。台車が動き始めるときの噴流の流速 u を求めよ。

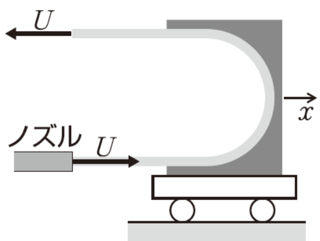

図 8　U 字物体を取り付けられた台車

略解：

⑴　$m=1000\,\mathrm{kg/m^3}\cdot0.1^2\pi\mathrm{m}^2\cdot0.5\,\mathrm{m/s}=15.7\,\mathrm{kg/s}$ （答）

⑵　式 5－66 より

$$f_x = m\,u\,(1-\cos\theta) = 15.7\mathrm{kg/s}\times0.5\mathrm{m/s}\times2=15.7\,\mathrm{N}$$ （答）

⑶　式 5－66 より $f_x = mu(1-\cos\theta)$ である。

一方，式 5－35 より $m=\rho Au$ であるから，これを式 5－66 に代入すると，$f_x=\rho Au^2(1-\cos\theta)$ となる。

よって，噴流の速度 u は，$u=\sqrt{\dfrac{f_x}{\rho A(1-\cos\theta)}}$ となり，数値を代入すると

$$u=\sqrt{\frac{25\mathrm{N}}{1000\mathrm{kg/m^3}\times0.1^2\pi m^2(1-\cos180^\circ)}}=0.63\mathrm{m/s}$$ （答）