新版線形代数　改訂版　解答

４章　行列の応用

２節　固有値と対角化

P.175　練習１　（固有値，それに属する固有ベクトル。α，β，γ は任意）

⑴　$\lambda = 1,\ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$　;　$\lambda = 2,\ \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix}$

⑵　$\lambda = 5,\ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$　;　$\lambda = -1,\ \begin{pmatrix} 2\beta \\ -\beta \end{pmatrix}$

⑶　$\lambda = 1,\ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$　;　$\lambda = 2,\ \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$　;　$\lambda = 3,\ \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$

⑷　$\lambda = 0,\ \begin{pmatrix} 4\alpha \\ -3\alpha \end{pmatrix}$　;　$\lambda = 25,\ \begin{pmatrix} 3\alpha \\ 4\alpha \end{pmatrix}$

⑸　$\lambda = 0,\ \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

P.179　練習２

以下で P，$P^{-1}AP$ の列の順序を同時に入れかえた組合せも，別解となる。

⑴　$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

⑵　$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

⑶　$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

P.179　練習３

（ｉ） $\boldsymbol{x}_1$，　$\boldsymbol{x}_2$ が一次従属だったとすると次の方程式，　$x\boldsymbol{x}_1 + y\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$　　　　㋐

には $x = 0$,　$y = 0$ 以外の解がある。　　　　㋐′

㋐の両辺に左から行列 A をかけると，　$Ax\boldsymbol{x}_1 + Ay\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$

よって　$x\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + y\lambda_2\boldsymbol{x}_2 = 0$　　　　㋑

㋐ $\times \lambda_2$ －㋑ より　$x(\lambda_2 - \lambda_1)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$

ところが，今　$\lambda_1 \fallingdotseq \lambda_2$，　$\boldsymbol{x}_1 \fallingdotseq \boldsymbol{0}$　なので $x = 0$ でなければならない。よって㋐′ より $y \fallingdotseq 0$ である。

ここで $x = 0$ のときの㋐が，　$y\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ であることに注目すると $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ でなければならない。

固有ベクトルは $\boldsymbol{0}$ ではないので矛盾である。よって $\boldsymbol{x}_1$，　$\boldsymbol{x}_2$ は１次独立である。

（ⅱ） $\boldsymbol{x}_1$，　$\boldsymbol{x}_2$，　$\boldsymbol{x}_3$　について考える。

（ｉ）よりこれらのうちのどの２つのベクトルの組も１次独立である。

$\boldsymbol{x}_1$，　$\boldsymbol{x}_2$，　$\boldsymbol{x}_3$　が１次従属だったとすると次の方程式

$x\boldsymbol{x}_1 + y\boldsymbol{x}_2 + z\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$　　　　㋒

には $x = 0$,　$y = 0$,　$z = 0$　以外の解がある。㋒′

㋒の両辺に左から行列 A をかけると　$Ax\boldsymbol{x}_1 + Ay\boldsymbol{x}_2 + Az\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$

よって $xA\boldsymbol{x}_1 + yA\boldsymbol{x}_2 + zA\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$

したがって $x\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + y\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + z\lambda_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$　　　　㋓

ここで㋒ $\times\lambda_3$ －㋓より　$x(\lambda_3 - \lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + y(\lambda_3 - \lambda_2)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$

㋑よりこの方程式の解は $x(\lambda_3 - \lambda_1) = 0$，　$y(\lambda_3 - \lambda_2) = 0$　である。

今　$\lambda_3 \fallingdotseq \lambda_1$，$\lambda_3 \fallingdotseq \lambda_2$ であるから $x = 0$,　$y = 0$　でなければならない。

したがって㋒′ より $z \fallingdotseq 0$　である。ここで $x = y = 0$　のときの㋒が $z\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$ であることに注目すると $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$ でなければならない。固有ベクトルは $\boldsymbol{0}$ ではないので矛盾である。よって $\boldsymbol{x}_1$，　$\boldsymbol{x}_2$，　$\boldsymbol{x}_3$　は１次独立である。

（ｉ）（ⅱ）のような議論を繰り返すと固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，　$\boldsymbol{x}_2$，　…，$\boldsymbol{x}_{\gamma-1}$　が１次独立のとき $\boldsymbol{x}_1$，　$\boldsymbol{x}_2$，　…，$\boldsymbol{x}_\gamma$　も１次独立であることが示される。

P.179　練習４

以下で P，　$P^{-1}AP$ の列の順序を同時に入れかえた組合せも，別解となる。

⑴　$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

⑵　$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

⑶　$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

P.182　練習５　　（α，βは任意）

⑴　固有方程式は $(\lambda-2)^2=0$ より固有値は $\lambda=2$（重解）である。しかし

$\lambda=2$に属する固有ベクトルは$\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$ のみである。2 個の 1 次独立なベクトルをもたないので

対角化不可能。

⑵　$P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ とおくと $|P|=1\neq 0$ より 1 次独立な 3 つの固有ベクトルが存在するので,

対角化可能であり，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

⑶　固有方程式は $(\lambda+1)^2(\lambda-1)=0$ より固有値は$\lambda=-1$（重解），1 である。しかし

$\lambda=-1$ に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\alpha\end{pmatrix}$ のみである。

したがって　3 個の 1 次独立なベクトルをもたないので対角化不可能。

P.185　練習６

⑴　$P=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$，${}^tPAP=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$

⑵　$P=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1&\sqrt{2}\\0&-2&\sqrt{2}\\-\sqrt{3}&1&\sqrt{2}\end{pmatrix}$，${}^tPAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

⑶　$P=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{\sqrt{14}}&\dfrac{3}{\sqrt{29}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\\dfrac{-1}{\sqrt{14}}&\dfrac{-2}{\sqrt{29}}&\dfrac{-1}{\sqrt{6}}\\\dfrac{3}{\sqrt{14}}&\dfrac{4}{\sqrt{29}}&\dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，${}^tPAP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

P.187　練習 7

以下で，P，$P^{-1}AP$ の列の順序を同時に入れかえた組合せも，別解となる。

⑴　$P=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1\\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1\\ \sqrt{3} & 0 & -2\end{pmatrix}$，${}^tPAP=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

⑵　$P=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1\\ \sqrt{2} & 0 & 2\end{pmatrix}$，${}^tPAP=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

⑶　$P=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$，${}^tPAP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

P.188　練習８

⑴　$P=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ であり，

$A^n=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5^n\end{pmatrix}P^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}5^n+3 & -3\cdot 5^n+3\\ -5^n+1 & 3\cdot 5^n+1\end{pmatrix}$

⑵　$P=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ であり，

$A^n=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 3^n+1\end{pmatrix}$

P.191　練習 9

⑴　$5x^2-2xy+5y^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$

とおくと　$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ により　${}^tPAP=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$　つまり　$A=P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}{}^tP$

${}^tP\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$　とおくと

$5x^2-2xy+5y^2={}^t\boldsymbol{x}'\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}'=4x'^2+6y'^2$

よって　${}^tP$　の表す 1 次変換で　$C':4x'^2+6y'^2=12$　つまり　$\frac{x'^2}{3}+\frac{y'^2}{2}=1$　に移る。

また，${}^tP=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$

つまり　問題の 2 次曲線 C は　$C':\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　を原点中心に　$\frac{\pi}{4}$　回転させた曲線。

⑵　$5x^2-6xy+5y^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$

とおくと　$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ により　${}^tPAP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$　つまり　$A=P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}{}^tP$

${}^tP\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$　とおくと

$5x^2-6xy+5y^2={}^t\boldsymbol{x}'\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}'=2x'^2+8y'^2$

よって　${}^tP$　の表す 1 次変換で　$C':2x'^2+8y'^2=8$　つまり　$\frac{x'^2}{4}+y'^2=1$　に移る。

また，${}^tP=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$

つまり　問題の 2 次曲線 C は　$C':\frac{x^2}{4}+y^2=1$　を原点中心に　$\frac{\pi}{4}$　回転させた曲線。

P.192　節末問題

1.　$\lambda = 0,\quad 2,\quad a+1\,;\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \dfrac{2a}{a-1}\beta_1 \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$　（α，　β，　γは任意）

2.
$$\begin{aligned} |A-\lambda E| &= \left|P^{-1}P(A-\lambda E)\right| = \left|P^{-1}\right|\left|A-\lambda E\right|\left|P\right| \\ &= \left|P^{-1}(A-\lambda E)P\right| = \left|P^{-1}AP-\lambda P^{-1}EP\right| \\ &= \left|P^{-1}AP-\lambda E\right| \end{aligned}$$

よって A と $P^{-1}AP$ の固有方程式は同じ。したがって A と $P^{-1}AP$ の固有値は一致する。

3.

⑴　$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix},\quad BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

よって $AB = BA$

⑵　A の固有ベクトル$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を並べて $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1} = \dfrac{-1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

この P により B も対角される。実際

$$\begin{aligned} P^{-1}BP &= \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.　固有方程式　$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$ の解が $\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2$ とすると 2 次方程式の解と係数の関係から　$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d > 0$　$\lambda_1\lambda_2 = ad - b^2 > 0$　なので　$\lambda_1 > 0$ かつ $\lambda_2 > 0$ である。

5.　直交行列 P に対し $P\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$，　$\boldsymbol{x} \neq 0$ とする。

$${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}\left({}^tPP\right)\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{x})P\boldsymbol{x} = {}^t(\lambda\boldsymbol{x})\lambda\boldsymbol{x} = \lambda^2\,{}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}$$

${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|^2 \neq 0$ なので $\lambda^2 = 1$　よって　$\lambda = \pm 1$

P.192　節末問題つづき

6.　(1)　$\theta = -\dfrac{\pi}{4}$　で　$x^2 - y^2 = 2$　　　　(2)　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$　で　$x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

7.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ であり，

$$A^n = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2)^n \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -(-2)^n + 4 & (-2)^n + 2 \\ 0 & -(-2)^{n+1} + 4 & (-2)^{n+1} + 2 \\ 0 & -(-2)^{n+2} + 4 & (-2)^{n+2} + 2 \end{pmatrix}$$

P.197　演習

(1)　$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値は　$\lambda = 3$（重解），固有ベクトル　$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

たとえば　$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　とおくと　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$P = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_1')$　が　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となるような　$\boldsymbol{x}_1'$　を求めると　$\boldsymbol{x}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

つまり　$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　とおくと　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(2)　$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は　$\lambda = 1,\ 2$（重解）

それぞれの固有ベクトルとして　$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　を選ぶ。

たとえば　$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　とおくと　$|P| = -1 \neq 0$　より　P　は正則で　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_2')$　が　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となるような　$\boldsymbol{x}_2'$　を求めると　$\boldsymbol{x}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

つまり　$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　とおくと　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$