新版線形代数　改訂版　解答

４章　行列の応用

１節　１次変換

練 P.145　練習１

⑴ $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} x' = -1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{cases}$ から１次変換であり，

１次変換を表す行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

⑵ $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} x' = -1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + (-1) \cdot y \end{cases}$ から１次変換であり，

１次変換を表す行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

⑶ $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} x' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ y' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{cases}$ から１次変換であり，

１次変換を表す行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

⑷ $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 2 \\ y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{cases}$ から１次変換ではない。

⑸ $\begin{cases} x' = x \\ y' = 0 \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + 0 \cdot y \end{cases}$ から１次変換であり，

１時変換を表す行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

P.147　練習２

⑴ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

点$(1,\ -1)$

⑵ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

点$(0,\ 0)$

⑶ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

点$(1,\ 3)$

⑷ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

点$(2,\ 4)$

P.148　練習３

1 次変換 f を表す行列を$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$とおくと$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$から

$a+b=2 \quad a-b=2$

$c+d=2 \quad c-d=4$

これらを解いて　$a=2$，　$b=0$，　$c=3$，　$d=-1$

よって，求める f を表す行列は$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

（別解）　求める 1 次変換 f を表す行列を A とすると　$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

これから　$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

よって　$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

P.150　練習４

⑴ $$\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ から　点$\left(0,\quad 2\right)$

⑵ $$\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{2} & -\sin\dfrac{\pi}{2} \\ \sin\dfrac{\pi}{2} & \cos\dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$ から　点$\left(-1,\quad \sqrt{3}\right)$

⑶ $$\begin{pmatrix} \cos\dfrac{5}{6}\pi & -\sin\dfrac{5}{6}\pi \\ \sin\dfrac{5}{6}\pi & \cos\dfrac{5}{6}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ から　点$\left(-2,\quad 0\right)$

P.150　練習５

もとの点 P の座標を$\left(x,\quad y\right)$とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right) & -\sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right) \\ \sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right) & \cos\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

よって，点 P の座標は　$\left(-1,\quad -3\right)$

P.151　練習６

$g \circ f$ を表す行列は　$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$　　$f \circ g$ を表す行列は　$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

P.152　練習 7

$$f\circ g=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

次に $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

よって　　点 $\left(2\sqrt{2},\ \ -\sqrt{2}\right)$

P.153　練習 8

$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ であり　$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}$　であるから　$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

よって，点 $(1,\ \ 0)$ に移されるもとの点は $(-1,\ \ 2)$

同様に　$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ より　$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

よって，点 $(0,\ \ 1)$ に移されるもとの点は $(2,\ \ -3)$

P.153　練習 9

1 次変換 f を表す行列は　$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$　でありその行列式は　$\cos^2\theta-\left(-\sin^2\theta\right)=1$ であるから

f^{-1} を表す行列は P.81 の逆行列の公式より　$\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$　となる。

ところで　$\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(-\theta)&-\sin(-\theta)\\\sin(-\theta)&\cos(-\theta)\end{pmatrix}$　であるから，　f^{-1} は角 $(-\theta)$ の回転移動を表す

1 次変換である。

P.154　練習 10

⑴　$(\text{与式}) = \begin{pmatrix} \cos\left(4\times\dfrac{\pi}{12}\right) & -\sin\left(4\times\dfrac{\pi}{12}\right) \\ \sin\left(4\times\dfrac{\pi}{12}\right) & \cos\left(4\times\dfrac{\pi}{12}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

⑵　$(\text{与式}) = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4} \\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} \cos\left(8\times\dfrac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(8\times\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(8\times\dfrac{\pi}{4}\right) & \cos\left(8\times\dfrac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$

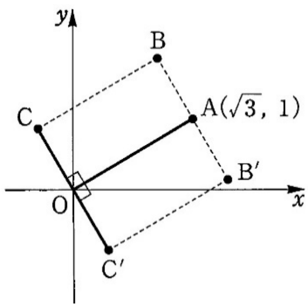
$= \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

⑶　$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix}$

よって　$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^6 = 2^6\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix}^6 = 2^6\begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$

$= 2^6\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -64 & 0 \\ 0 & -64 \end{pmatrix}$

P.155　練習 11



OA : OC = 2 : 1，∠AOC = $\frac{\pi}{2}$ であるから右の図のように，点 A を原点 O を中心として $\frac{\pi}{2}$ または，$-\frac{\pi}{2}$ 回転移動をし，さらに O を中心として相似比 $\frac{1}{2}$ の相似変換で移動した点が C である。したがって

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 9\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

もう 1 点は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

よって，頂点 C の座標は $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ または $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

P.156　演習

原点を通り，x 軸の正の方向と $\frac{\pi}{3}$ の角をなすℓの関する対称移動を表す行列は

$\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & \sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & -\cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$ である。点 P(6,　0) を直線ℓに関して対称移動した点を $P'(x', y')$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & \sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & -\cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

よって，点 P′ の座標は $\left(-3,\ 3\sqrt{3}\right)$ である。

P.158　練習 12

直線 $y=-x+2$ 上の点 $(x,\ y)$ の f による像を $(x',\ y')$ とおくと $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x'-y' \\ -3x'+2y' \end{pmatrix}$$

$x=2x'-y$ 　…①

$y=-3x'+2y'$ 　…②　ところで，$(x,\ y)$ は $y=-x+2$ を満たすので，①②を

$y=-x+2$ に代入して　$-3x'+2y'=-(2x'-y')+2$

∴　$y'=x'+2$

したがって，f による像は直線 $y=x+2$ である。

P.158　練習 13

⑴　直線 $y=x+1$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ x+1)$ の f による像を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5x+2 \\ x+4 \end{pmatrix}$$

∴　$x'=5x+2$，$y'=x+2$

これから x を消去すると　$y'=\dfrac{1}{5}x'+\dfrac{8}{5}$

したがって，f による像は　直線 $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{8}{5}$ である。

⑵　$3x-y=4$ の場合

直線 $y=3x-4$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ 3x-4)$ の f による像を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 3x-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5x-4 \\ 5x-8 \end{pmatrix}$$

∴　$x'=5x-4$，$y'=5x-8$

これから x を消去すると　$y'=x'-4$

したがって，f による像は　直線 $y=x-4$ である。

$3x-y=8$ の場合

直線 $y=3x-8$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ 3x-8)$ の f による像を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 3x-8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5x-8 \\ 5x-16 \end{pmatrix}$$

∴　$x'=5x-8$，$y'=5x-16$

これから x を消去すると　$y'=x'-8$

したがって，f による像は　直線 $y=x-8$ である。

P.158　練習 14

⑴　直線　$y=-\dfrac{1}{2}x+2$　上の任意の点　$\mathrm{P}\left(x,\ \ -\dfrac{1}{2}x+2\right)$ の f による像を $\mathrm{P}'(x',\ \ y')$　とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -\dfrac{1}{2}x+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-4 \\ -4x+8 \end{pmatrix}$$

$\therefore$　$x'=2x-4$，$y'=-4x+8$

これから x を消去すると　$y'=-2x'$

したがって，f による像は　直線　$y=-2x$　である。

⑵　直線　$y=\dfrac{1}{2}x+2$　上の任意の点　$\mathrm{P}\left(x,\ \ \dfrac{1}{2}x+2\right)$ の f による像を $\mathrm{P}'(x',\ \ y')$　とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \dfrac{1}{2}x+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\therefore$　$x'=-4$，$y'=8$

したがって，f による像は　点　$(-4,\ \ 8)$　である。

P.159　練習 15

⑴　$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{2} & -\sin\dfrac{\pi}{2} \\ \sin\dfrac{\pi}{2} & \cos\dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix}$$

$x=y'$，$y=-x'$ を $y^2=x$　に代入すると

$(-x')^2=y'$

$y'=x'^2$

よって，求める曲線の方程式は　$y=x^2$

P.159 練習 15 のつづき

⑵ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) & \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$x = \dfrac{x' + \sqrt{3}y'}{2}$， $y = \dfrac{-\sqrt{3}x' + y'}{2}$

上式を、 $y^2 = x$ に代入すると $\left(\dfrac{-\sqrt{3}x' + y'}{2}\right)^2 = \dfrac{x' + \sqrt{3}y'}{2}$

整理すると

$3x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + y'^2 - 2x' - 2\sqrt{3}y' = 0$

よって，求める曲線の方程式は $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}y = 0$

P.160 練習 16

⑴ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であるから

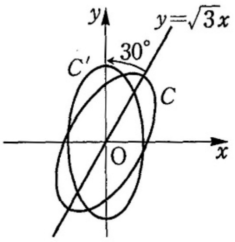
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) & \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$x = \dfrac{\sqrt{3}x' + y'}{2}$， $y = \dfrac{-x' + \sqrt{3}y'}{2}$

上式を $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 = 16$ に代入して整理すると $x'^2 + \dfrac{y'^2}{4} = 1$

よって， C' の方程式は $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

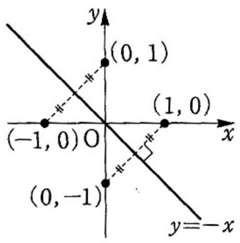
⑵ 曲線 C は C' を原点 O を中心として $\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ だけ回転したものである。



y
$y=\sqrt{3}x$
$30°$
C'
C
O
x

P.161　節末問題

1.

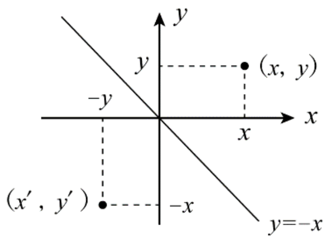


点（1，0）の像は点（0，$(x,\ \ y)$ −1），点（0，1）の像は点（−1，0）

よって，$y=-x$ に関する対称移動を表す 1 次変換の行列は $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

（別解）

$(x,\ \ y)$ の像を $(x',\ \ y')$ とおくと，



$\begin{cases} x'=-y \\ y'=-x \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} x'=0\cdot x+(-1)\cdot y \\ y'=(-1)\cdot x+0\cdot y \end{cases}$

よって 1 次変換の行列は $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2.

求める行列を A とすると

$A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ が成り立つ。

上の 2 式をまとめると $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ …①

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を①の右から掛けると　$A=\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

3.

f : 原点を中心とする $-\dfrac{2}{3}\pi$ の回転移動　g : $y=x$ に関する対称移動とすると f，g を表す行列は

それぞれ $\begin{pmatrix} \cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right) & -\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right) \\ \sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right) & \cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。

したがって，$g\circ f$ を表す 1 次変換は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ である。

点 P$\left(1,\ \ 3\sqrt{3}\right)$ の像は $\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix}$　よって，点 Q$\left(-2\sqrt{3},\ \ 4\right)$ である。

P.161 節末問題つづき

4.

⑴ 求める点を $(x,\ y)$ とすると $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ を左から掛けて $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって，点 $(1,\ 0)$

⑵ $f \circ f$ を表す 1 次変換は $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ である。

したがって点 $(2,\ -1)$ の像は $\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって，点 $(2,\ 1)$

5.

$\begin{pmatrix} 4 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ -4 \end{pmatrix}$ より

2 点 $(4,\ b)$，$(-2a,\ -4)$ が直線 $x - 5y = 14$ 上にあればよい。

$\begin{cases} 4 - 5b = 14 \\ -2a + 20 = 14 \end{cases}$ これを解いて $a = 3,\quad b = -2$

6.

⑴ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\mathrm{A}'(2,\ 6)$, $\mathrm{B}'(6,\ 12)$

⑵ $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 3)$ より線分 AB を $m : n$ に内分する点 P は $\mathrm{P}\left(\dfrac{2n}{m+n},\ \dfrac{3m}{m+n}\right)$

点 P の f による像 P′ は

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{2n}{m+n} \\ \dfrac{3m}{m+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2n+6m}{m+n} \\ \dfrac{6n+12m}{m+n} \end{pmatrix}$ より $\mathrm{P}'\left(\dfrac{2n+6m}{m+n},\ \dfrac{6n+12m}{m+n}\right)$

⑴より，線分 A′B′ を $m : n$ に内分する点は $\left(\dfrac{2n+6m}{m+n},\ \dfrac{6n+12m}{m+n}\right)$ となり，点 P′ と一致する。

よって，点 P′ は線分 A′B′ を $m : n$ に内分する。

P.162　節末問題つづき

⑶　$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 3=3$

直線OB′の方程式は $y=2x$，つまり $2x-y=0$ であるから，点A′(2，6)からOB′に引いた垂線をA′Hとすると

$$\mathrm{A'H}=\frac{|2\times 2-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\triangle\mathrm{OA'B'}=\frac{1}{2}\times\mathrm{OB'}\times\mathrm{A'H}=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=6$$

よって，△OA′B′の面積は△OABの面積の2倍である。

7.

⑴　$A\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ かつ $A^2\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 0\end{pmatrix}$

$A^2\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=A\left\{A\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ より $A\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ かつ $A\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 0\end{pmatrix}$

したがって　$A\begin{pmatrix}1 & -1\\ \sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ \sqrt{3} & 0\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ \sqrt{3} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ \sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ \sqrt{3} & 0\end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -3\\ 3 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

⑵　$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$ より $A^3=\begin{pmatrix}\cos\pi & -\sin\pi\\ \sin\pi & \cos\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

⑶　$A^3=-E$ より　$A^4+A^5+A^6=A^3(A+A^2+A^3)=-E(A+A^2+A^3)=-A-A^2-A^3$

よって　$(与式)=A+A^2+A^3-A-A^2-A^3=O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(⑶の別解)

$(与式)=A(E+A+A^2+A^3+A^4+A^5)$

$S=E+A+A^2+A^3+A^4+A^5$　…①

①の両辺に左から A を掛けると　$AS=A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6$　…②

②－①より　$(A-E)S=A^6-E$

ここで，$A^3=-E$　より　$A^6=E$

したがって，$(A-E)S=O$

$(A-E)^{-1}$　は存在するので，左から　$(A-E)^{-1}$　を掛けると　$S=O$

ゆえに　$(与式)=A\cdot O=O$

P.162　節末問題つづき

8.

⑴　$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ かつ $A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ より $A\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

⑵　$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} 2s + t = 1 \\ 6s + 3t = 3 \end{cases}$　　よって　$2s + t = 1$

9.

$m \fallingdotseq 0$ のとき，直線 PQ $\perp$ $y = mx$　かつ　PQ の中点が $y = mx$ 上より

$$\frac{y' - y}{x' - x} \cdot m = -1,\quad \frac{y + y'}{2} = m \cdot \frac{x + x'}{2}$$

$\begin{cases} x' + my' = x + my \\ mx' - y' = -mx + y \end{cases}$　であるから　$\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ -m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　…①が成り立つ。

$\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-\left(m^2 + 1\right)}\begin{pmatrix} -1 & -m \\ -m & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{m^2 + 1}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}$　であるから，①より

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{m^2 + 1}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ -m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{m^2 + 1}\begin{pmatrix} 1 - m^2 & 2m \\ 2m & m^2 - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1 - m^2}{m^2 + 1} & \dfrac{2m}{m^2 + 1} \\ \dfrac{2m}{m^2 + 1} & -\dfrac{1 - m^2}{m^2 + 1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots②$$

$m = 0$ のとき，x 軸に関する対称移動となり，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となりこのときも②式でよい。

10.

図形上における任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の f による像を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とする。図形を x 軸方向に 2 倍，y 軸方向に 3 倍の比率で拡大することから，

$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases}$　すなわち　$\begin{cases} x' = 3x + 0y \\ y' = 0x + 2y \end{cases}$　である。

つまり，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　であるから　1 次変換 f を表す行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ である。

$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases}$　だから　$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{2} \\ y = \dfrac{y'}{3} \end{cases}$　を楕円 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ に代入すると $\dfrac{x'^2}{36} + \dfrac{y'^2}{36} = 1$

したがって，f による像は　円 $x^2 + y^2 = 36$ である。

P.162 節末問題つづき

11.

1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $(a \fallingdotseq 0)$ より $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = bx - ay \end{cases}$

この式から x と y を求めると， $x = \dfrac{ax' + by'}{a^2 + b^2}$， $y = \dfrac{bx' - ay'}{a^2 + b^2}$ である。

これを $x^2 + y^2 = c^2$ に代入すると

$$\left(\frac{ax' + by'}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{bx' - ay'}{a^2 + b^2}\right)^2 = c^2$$

$$\frac{\left(a^2 x'^2 + 2abx'y' + b^2 y'^2\right) + \left(b^2 x'^2 - 2abx'y' + a^2 y'^2\right)}{\left(a^2 + b^2\right)^2} = c^2$$

$$\frac{\left(a^2 + b^2\right)x'^2 + \left(a^2 + b^2\right)y'^2}{\left(a^2 + b^2\right)^2} = c^2$$

$$\frac{x'^2 + y'^2}{\left(a^2 + b^2\right)} = c^2$$

$$x'^2 + y'^2 = c^2\left(a^2 + b^2\right)$$

したがって，f による像は　円 $x^2 + y^2 = c^2\left(a^2 + b^2\right)$ である。

P.164　演習 1　和と実数倍について⑴～⑻を確認する。

⑴ $$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right)$$

⑵ $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

⑶ $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + a_1 \\ 0 + a_2 \\ 0 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

⑷ $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_1 \\ a_2 - a_2 \\ a_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

P.164　演習 1 つづき

⑸　$$(s+t)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s+t)a_1 \\ (s+t)a_2 \\ (s+t)a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1+ta_1 \\ sa_2+ta_2 \\ sa_3+ta_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ sa_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ta_1 \\ ta_2 \\ ta_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

⑹　$$t\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(a_1+b_1) \\ t(a_2+b_2) \\ t(a_3+b_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_1+tb_1 \\ ta_2+tb_2 \\ ta_3+tb_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ta_1 \\ ta_2 \\ ta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tb_1 \\ tb_2 \\ tb_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

⑺　$$(st)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sta_1 \\ sta_2 \\ sta_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} ta_1 \\ ta_2 \\ ta_3 \end{pmatrix} = s\left(t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right)$$

⑻　$$1\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot a_1 \\ 1\cdot a_2 \\ 1\cdot a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

よって　⑴～⑻のすべての性質を満たしているので $\boldsymbol{R}^3$ は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間である。

P.166　演習２

⑴　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}0\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\in\boldsymbol{W}_1$ と $t\in\boldsymbol{R}$　に対して

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}\in\boldsymbol{W}_1$，　$t\boldsymbol{a}=t\begin{pmatrix}0\\ta_2\\ta_3\end{pmatrix}\in\boldsymbol{W}_1$　したがって $\boldsymbol{W}_1$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間。

⑵　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\in\boldsymbol{W}_2$　であるが

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ は，$1^2+1^2+0^2=2\neq1$　より　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\notin\boldsymbol{W}_2$

したがって　$\boldsymbol{W}_2$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない。（他にさまざまな反例が存在するのでみつけてみよう。）

⑶　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in\boldsymbol{W}_3$ であるが，$-1\in\boldsymbol{R}$　に対して $(-1)\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ であり，$(-1)+(-1)+(-1)<0$

より　$(-1)\boldsymbol{a}\notin\boldsymbol{W}_3$　したがって $\boldsymbol{W}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない。

（他にさまざまな反例が存在するのでみつけてみよう。）

P.167　演習３

⑴　$\begin{vmatrix}-1&2\\3&-5\end{vmatrix}=5-6=-1\neq0$　よって　$\boldsymbol{a}_1$　と　$\boldsymbol{a}_2$　は１次独立であるので基底である。

⑵　$\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

$\begin{cases}3=-\lambda+2\mu\\-7=3\lambda-5\mu\end{cases}$　より　$\lambda=1,\quad\mu=2$　したがって　$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2$

P.167　演習４

$$\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\2&-3&0&-1\\3&1&-4&3\\4&3&0&-1\end{vmatrix}\overset{\substack{②+①\times(-2)\\③+①\times(-3)\\④+①\times(-4)}}{=\!=}\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\0&-1&2&-5\\0&4&-7&-3\\0&7&-4&-9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2&-5\\4&-7&-3\\7&-4&-9\end{vmatrix}\overset{\substack{②+①\times4\\③+①\times7}}{=\!=}\begin{vmatrix}-1&2&-5\\0&1&-23\\0&10&-44\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&-23\\10&-44\end{vmatrix}=-(-44+230)=-186\neq0$$

よって，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$ は１次独立であるので基底である。

P.168　演習５

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{②+① \\ ③+①\times(-2) \\ ④+①\times(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{②+①\times(-2) \\ ③+② \\ ④+②\times(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{③\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{①+③ \\ ②+③\times(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{b}_4 \end{pmatrix}
$$
とおくと

$$
\boldsymbol{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3
$$
よって　$\boldsymbol{a}_4 = 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$

P.169　練習６

⑴　$\boldsymbol{a}_1$と$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$のうちの２つをとって$\boldsymbol{W}$の基底になる。
ゆえに　$\dim \boldsymbol{W} = 3$で基底は　$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$　（または$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4\}$，または$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$）

⑵　たとえば　$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1, & \boldsymbol{a}_2, & \boldsymbol{a}_3, & \boldsymbol{e}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{e}_4 \end{pmatrix} = 4$　より
$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_4\}$は１次独立となり$\boldsymbol{R}^4$の基底である。