新版線形代数　改訂版　解答

３章　行列式

２節　行列式の応用

P.130　練習１

⑴ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 3 = -13 \neq 0$

$\tilde{a}_{11} = -5,\ \tilde{a}_{12} = -1,\ \tilde{a}_{21} = -3,\ \tilde{a}_{22} = 2$ であるから余因子行列は $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

したがって，逆行列は $\dfrac{1}{-13}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{13} & \dfrac{3}{13} \\ \dfrac{1}{13} & -\dfrac{2}{13} \end{pmatrix}$

⑵ $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 36 + 4 + 3 - 18 + 6 + 4 = 35 \neq 0$

$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 12 - 6 = 6,\ \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-3-2) = 5$

$\tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7,\ \tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -(-6-3) = 9$

$\tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 1 = -10,\ \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(9-2) = -7$

$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (-4) = 8,\ \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6-1) = -5$

$\tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 2 = -14,$ であるから余因子行列は，$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 5 & -10 & -5 \\ 7 & -7 & -14 \end{pmatrix}$

したがって逆行列は，$\dfrac{1}{35}\begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 5 & -10 & -5 \\ 7 & -7 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{6}{35} & \dfrac{9}{35} & \dfrac{8}{35} \\ \dfrac{1}{7} & -\dfrac{2}{7} & -\dfrac{1}{7} \\ \dfrac{1}{5} & -\dfrac{1}{5} & -\dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$

⑶ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 8 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 16 - (-16) - (-12) = 0$

したがって，正則でないので逆行列は存在しない。

P.132　練習２

(1) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{3-4}{3-2} = -1$

$x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{4-2}{3-2} = 2$

(2) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-12-21}{-4-15} = \dfrac{-33}{-19} = \dfrac{33}{19}$

$x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{14-30}{-4-15} = \dfrac{-16}{-19} = \dfrac{16}{19}$

P.134　練習３

以下の行列式計算は 1 つの例としてサラスの公式を用いているが，P.134 例題 2 のように，基本形や余因子展開を用いたさまざまな方法で計算することができる。

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 12+5+18+30+9-4 = 70$

$$x_1 = \frac{1}{70}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 11 & 2 & 5 \\ 8 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{70}(-18+40+66-45+33-32) = \frac{1}{70}\cdot 44 = \frac{22}{35}$$

$$x_2 = \frac{1}{70}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & 11 & 5 \\ 1 & 8 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{70}(66+15+48+80+27-22) = \frac{1}{70}\cdot 214 = \frac{107}{35}$$

$$x_3 = \frac{1}{70}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{70}(-32+11+27+66-24-6) = \frac{1}{70}\cdot 42 = \frac{3}{5}$$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+27+8-6-6-6 = 18$

$$x_1 = \frac{1}{18}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{18}(1+9+4-6-3-2) = \frac{1}{18}\cdot 3 = \frac{1}{6}$$

$$x_2 = \frac{1}{18}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{18}(1+9+4-3-2-6) = \frac{1}{18}\cdot 3 = \frac{1}{6}$$

$$x_3 = \frac{1}{18}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{18}(1+9+4-2-6-3) = \frac{1}{18}\cdot 3 = \frac{1}{6}$$

P.136　練習 4

必要： $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{0}$ 以外の解をもつとする。$|A|\neq 0$ とすると， A^{-1} が存在し，これを左からかけると

$A^{-1}A\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$　　よって解が $\boldsymbol{0}$ のみとなり矛盾する。したがって $|A|=0$

十分：対偶を示そう。 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が自明な解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ しかもたないとする。

このとき，拡大係数行列の基本変形により，$\left[A\,|\,\boldsymbol{0}\right]\to\left[E\,|\,\boldsymbol{0}\right]$ と変形される。

このとき，$|A|$ と $|E|$ は 0 以外の定数倍だけ異なるので，$|A|\neq 0$

対偶が示されたので，$|A|=0$ のとき， $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は自明な解以外の解をもつ。

P.136　練習 5

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 12 \end{vmatrix} = -k+5+16+4-2k-10=-3k+15=0 \qquad \text{したがって}\quad k=5$$

拡大係数行列を基本変形によって変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③}+\text{①}\times(-5)]{\text{②}+\text{①}\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 15 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②}\times\left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & -9 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{③}+\text{②}\times 9]{\text{①}+\text{②}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

連立方程式に戻すと $\begin{cases} x_1-\frac{1}{3}x_3=0 \\ x_2-\frac{5}{3}x_3=0 \end{cases}$　つまり $\begin{cases} x_1=\frac{1}{3}x_3 \\ x_2=\frac{5}{3}x_3 \end{cases}$

したがって， $x_3=3t$ とおくと，0 でない任意の定数 t を用いて　$x_1=t$，$x_2=5t$，$x_3=3t$

P.137　練習 6

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

より△ABC の面積は $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|35-(-6)\right|=\frac{41}{2}$

P.138　練習７

⑴　$\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}\right| = \left| 1+8-1-2+2-2 \right| = \left| 6 \right| = 6$

⑵　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ より $\left|\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left| 3+9 \right| = \left|12\right| = 12$

P.139　練習８

$\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$　のとき，$\lambda = \mu = \nu = 0$　を示せばよい。

成分を用いて表すと　$\begin{cases} a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu = 0 \\ a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu = 0 \\ a_3\lambda + b_3\mu + c_3\nu = 0 \end{cases}$

行列で表すと　$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

仮定より係数行列は正則であるから，この両辺の左から逆行列をかけると

$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　　したがって　$\lambda = \mu = \nu = 0$

P.141　練習９

⑴　$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-6 = -2 \neq 0$　　したがって　1 次独立

⑵　$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3+6-15+6 = 0$　　したがって　1 次従属

⑶　$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -2+4-20+20+8-1 = 9 \neq 0$　　したがって　1 次独立

P.141　練習 10

⑴　P.121 練習 9 より

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)^2 = 0$$ をみたす x は　$x = 1,\ -2$

従って　$\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$ が 1 次従属となる x の値は　$x = 1,\ -2$

⑵　P.121　練習 9 より

$$\begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 3 \\ 1 & 3 & 1-x \end{vmatrix} = (5-x)(x+2)(x-2) = 0$$ をみたす x は　$x = 5,\ \pm 2$

従って　$\begin{pmatrix} 3-x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1-x \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1-x \end{pmatrix}$ が 1 次従属となる x の値は　$x = 5,\ \pm 2$

P.141　節末問題

1.
$$\tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2-(-1) = 3$$

$$\tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-4-2) = 6$$

$$\tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4-4 = 0$$

2.

⑴ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2+3-12-1 = -12 \neq 0$　であるから A は正則である。

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7,\ \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$\tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

$$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,\ \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

であるから　A の余因子行列は　$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

逆行列は　$A^{-1} = \dfrac{1}{-12}\begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

P.141　節末問題　2 のつづき

(2) $$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{③+①}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\{(-1)\cdot 0 - 1\cdot 1\} = 1 \neq 0$$

であるから，A は正則である。

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,\quad \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,\quad \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,\quad \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,\quad \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\quad \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\quad \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

であるから，A の余因子行列は　$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

逆行列は　$A^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{②+①\times(-1)}{=\!=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times(1\cdot 2 - 3\cdot 1) = -2 \neq 0$$

であるから，A は正則である。

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\quad \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,\quad \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2,\quad \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,\quad \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3,\quad \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -6,\quad \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

であるから，A の余因子行列は　$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

逆行列は　$A^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

P141　節末問題　2 のつづき

(4)
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-1\right) = -1 \neq 0$$

であるから，A は正則である。

$$\widetilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot\left(-1\right) = -1,\quad \widetilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -0\cdot 1\cdot\left(-1\right) = 0$$

$$\widetilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0\cdot 0\cdot\left(-1\right) = 0,\quad \widetilde{a}_{14} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -0\cdot 0\cdot 0 = 0$$

$$\widetilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\left(-1\right)\cdot 1\cdot\left(-1\right) = -1,\quad \widetilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot\left(-1\right) = -1$$

$$\widetilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot 0\cdot\left(-1\right) = 0,\quad \widetilde{a}_{24} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 0 = 0$$

$$\widetilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \end{vmatrix} = \left(-1\right)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,\quad \widetilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot\left(-1\right)\cdot\left(-1\right) = -1$$

$$\widetilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot\left(-1\right) = -1,\quad \widetilde{a}_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot 1\cdot 0 = 0$$

$$\widetilde{a}_{41} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & \boxed{0} \\ 1 & -1 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & \boxed{0} \end{vmatrix} = 0-0+0 = 0,\quad \widetilde{a}_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & -1 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & \boxed{0} \end{vmatrix} = 0-0+0 = 0$$

$$\widetilde{a}_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{vmatrix} = 0-0+0 = 0,\quad \widetilde{a}_{44} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

であるから，A の余因子行列は　$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

逆行列は　$A^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

P.141　節末問題 2 のつづき

⑸ $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1 = 1 \neq 0$

であるから，A は正則である。

$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$，$\tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & c \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$，$\tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -a$，$\tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$，$\tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = ac$，$\tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = -c$，$\tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

であるから，A の余因子行列は　$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

逆行列は　$A^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -a & ac \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.

$|AB| \neq 0$　のとき　$|A| \neq 0$，$|B| \neq 0$　であるから

$$\tilde{B}\tilde{A} = |B|\,B^{-1}\,|A|\,A^{-1} = |B|\,|A|\,B^{-1}A^{-1}$$
$$= |BA|\,(AB)^{-1} = |AB|\,(AB)^{-1} = \widetilde{AB}$$

4.　$\tilde{A}A = |A|E$　より　$|\tilde{A}A| = |A^n|$

$|\tilde{A}|\,|A| = |A|^n$　　よって　$|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$

5.

⑴

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{16-3}{4-(-9)} = \frac{13}{13} = 1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-2-24}{4-(-9)} = \frac{-26}{13} = -2$$

P.142 節末問題 5 のつづき

⑵ $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-12+1-3-2+8=-4$$

$$x_1 = \frac{1}{-4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(4+18+5-3-10-12) = -\frac{1}{4}\cdot 2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{-4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(10-12+6-18-2+20) = -\frac{1}{4}\cdot 4 = -1$$

$$x_3 = \frac{1}{-4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(12-20+1-5-6+8) = -\frac{1}{4}\cdot(-10) = \frac{5}{2}$$

6.

$$\begin{cases} (1-k)x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ (2-k)x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + (2-k)x_3 = 0 \end{cases}$$ が $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 以外の解をもつ条件を考える。

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 & 2 \\ 0 & 2-k & 1 \\ -1 & 2 & 2-k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4-2k & 2+(2-k)(1-k) \\ 0 & 2-k & 1 \\ -1 & 2 & 2-k \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2(2-k) & k^2-3k+4 \\ 2-k & 1 \end{vmatrix} = -(2-k)\begin{vmatrix} 2 & k^2-3k+4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (k-2)(2-k^2+3k-4) = -(k-2)^2(k-1) = 0$$

したがって $k = 1,\ 2$

$k=1$ のとき $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

したがって $x_2 = t$（t は 0 でない任意定数）とおけば $x_1 = t,\ x_2 = t,\ x_3 = -t$

（または，$x_3 = t$ とおけば $x_1 = -t,\ x_2 = -t,\ x_3 = t$）

$k=2$ のとき $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

したがって $x_2 = t$（t は 0 でない任意定数）とおけば $x_1 = 2t,\ x_2 = t,\ x_3 = 0$

7.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

より $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -2-20-15-8 = -45$

したがって　平行六面体の体積は　$|-45| = 45$

8.

⑴ $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & x \end{vmatrix} = x - 8 - 20 - 6x = 0$

したがって　$-5x = 28$

$$x = -\frac{28}{5}$$

⑵ P.121　練習 9 ⑶より

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1)^2(x-3) = 0$$

したがって　$x -1,\ 1,\ 3$

9.

⑴ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$　　したがって　1 次独立

⑵ $\boldsymbol{p} = \ell\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} + n\boldsymbol{c}$　とおくと $\begin{cases} \ell + m + n = -1 \\ \ell + m \quad\;\; = 2 \\ \ell \qquad\quad\;\; = 0 \end{cases}$

これより　$\ell = 0$，$m = 2$，$n = -3$

したがって，$\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{q} = \ell\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} + n\boldsymbol{c}$　とおくと $\begin{cases} \ell + m + n = 6 \\ \ell + m \quad\;\; = 2 \\ \ell \qquad\quad\;\; = 3 \end{cases}$

これより，　$\ell = 3$，$m = -1$，$n = 4$

したがって，$\boldsymbol{q} = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{c}$

10.

$\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_k$ が互いに直交していると仮定する。

$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ とする。 —（∗）

$1 \leqq i \leqq k$ となる整数 i に対して（∗）の両辺のベクトルと，$\boldsymbol{a}_i$ との内積を考えると $c_i\,|\,\boldsymbol{a}_i\,|^2 = 0$

$|a_i| \neq 0$ より $c_i = 0$

つまり $c_1 = \cdots = c_k = 0$ よって $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_k$ は1次独立である。