新版線形代数　改訂版　解答

３章　行列式

１節　行列式の定義と性質

P.104　練習１

⑴　$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 4$

$|A| \fallingdotseq 0$ より A は正則であり，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -(-1) \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot 1 & \frac{1}{4} \cdot 1 \\ \frac{1}{4} \cdot (-2) & \frac{1}{4} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

⑵　$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$

$|A| \fallingdotseq 0$ より A は正則であり，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⑶　$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - (-5) \cdot 1 = 13$

$|A| \fallingdotseq 0$ より A は正則であり，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -(-5) \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} \cdot 2 & \frac{1}{13} \cdot 5 \\ \frac{1}{13} \cdot (-1) & \frac{1}{13} \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{1}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}$$

⑷　$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 = 0$

$|A|=0$ より A は正則でない。

P.108　練習２　　以下は計算例である。

⑴ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{①\leftrightarrow③}{=\!=} (-1)\times\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\times 3\times 2\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6\times 1 = -6$

⑵ $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{②\leftrightarrow③}{=\!=} (-1)\times\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{①\leftrightarrow②}{=\!=} (-1)\times(-1)\times\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= 3\times 4\times(-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12\times 1 = -12$

⑶ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{①\leftrightarrow②}{=\!=} (-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{②\leftrightarrow③}{=\!=} (-1)\times(-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$\overset{③\leftrightarrow④}{=\!=} (-1)\times(-1)\times(-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\times(-1)\times(-1)\times 1 = -1$

⑷ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{②\leftrightarrow③}{=\!=} (-1)\times\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{①\leftrightarrow②}{=\!=} (-1)\times(-1)\times\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$\overset{②\leftrightarrow③}{=\!=} (-1)\times(-1)\times(-1)\times\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^3\times 4\times 3\times 2\times 5\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-1)^3\times 4\times 3\times 2\times 5\times 1 = -120$

P.111　練習３

⑴ $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2\times 1\times\left(-3\right) = -6$

⑵ $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 3\times\left(-1\right)\times\left(-2\right) = 6$

⑶ $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\times\left(-3\right)\times 2\times 1 = -24$

⑷ $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\times\left(-3\right)\times\left(-1\right)\times 5 = 30$

P.113　練習４　以下は計算例である。

⑴ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} \overset{\substack{②+①\times(-2) \\ ③+①\times(-3)}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{性質IV}}{=\!=} 1\times\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = \left(-1\right)\times 1 - 0\times\left(-3\right) = -1$

⑵ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} \overset{\substack{②+①\times(-1) \\ ③+①\times(-1) \\ ④+①\times(-1)}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{性質IV}}{=\!=} 1\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{\substack{②+①\times(-1) \\ ③+①\times(-1)}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

$\overset{\text{性質IV}}{=\!=} 1\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 1\times 1 = 3$

P.113　練習４つづき

(3)
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \overset{\boxed{1}\leftrightarrow\boxed{4}}{=\!=} (-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ -3 & 1 & -4 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{②+①\times 3 \\ ③+①\times 2}}{=\!=} (-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 10 & 14 & 5 \\ 0 & 8 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{性質Ⅳ}{=\!=} (-1)\times 1\times\begin{vmatrix} 10 & 14 & 5 \\ 8 & 17 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{①\leftrightarrow③}{=\!=} (-1)\times(-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 8 & 17 & 4 \\ 10 & 14 & 5 \end{vmatrix} \overset{\substack{②+①\times(-8) \\ ③+①\times(-10)}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -15 & -20 \\ 0 & -26 & -25 \end{vmatrix}$$

$$\overset{性質Ⅳ}{=\!=} 1\times\begin{vmatrix} -15 & -20 \\ -26 & -25 \end{vmatrix} = (-5)\times\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -26 & -25 \end{vmatrix} = (-5)\times\left\{3\times(-25)-4\times(-26)\right\} = -145$$

(4)
$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{①\leftrightarrow②}{=\!=} (-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{②+①\times(-3) \\ ③+①\times(-2) \\ ④+①\times(-1)}}{=\!=} (-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & -5 & 9 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{性質Ⅳ}{=\!=} (-1)\times 1\times\begin{vmatrix} -6 & -5 & 9 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{①+②\times(-1)}{=\!=} (-1)\times\begin{vmatrix} -1 & -6 & 7 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{②+①\times(-5) \\ ③+①\times 2}}{=\!=} (-1)\times\begin{vmatrix} -1 & -6 & 7 \\ 0 & 31 & -33 \\ 0 & -13 & 16 \end{vmatrix} \overset{性質Ⅳ}{=\!=} (-1)\times(-1)\times\begin{vmatrix} 31 & -33 \\ -13 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2\times\left\{31\times 16-(-33)\times(-13)\right\} = 67$$

P.115　練習５

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 2\times 9-3\times 8 = -6$$

$$b_{21} = (-1)^{2+1}D_{21} = (-1)\times(-6) = 6$$

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4\times 8-5\times 7 = -3$$

$$b_{13} = (-1)^{1+3}D_{13} = 1\times(-3) = -3$$

P.118　練習６　以下は計算例である。

(1)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{展開}{\overset{第2行}{=\!=}} 4\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\ 2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -4\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

③＋②$\times(-1)$　　$\boxed{3}+\boxed{1}\times(-1)$　　③＋②$\times(-1)$　　$\boxed{2}+\boxed{1}\times(-2)$

展開

$$= -4\left\{0+1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}+0\right\} - \left\{1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}+0+0\right\}$$

$$-2\left\{0+1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}+0\right\} + \left\{1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}+0+0\right\}$$

$$= -4\cdot(-1)\cdot\{1\cdot3-(-4)\cdot(-3)\} - \{(-4)\cdot(-2)-(-2)\cdot(-3)\}$$

$$-2\cdot(-1)\cdot\{2\cdot(-3)-1\cdot(-2)\} + \{(-3)\cdot(-3)-(-4)\cdot(-1)\}$$

$$= -41$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & -7 & 6 \\ 0 & 8 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & -8 & 9 & 1 \end{vmatrix} \overset{展開}{=\!=} 6\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$+6\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 9 & -7 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & -8 & 9 \end{vmatrix} + 0 + 1\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & 9 & -7 \\ 0 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -6\begin{vmatrix} 0 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -8 & 21 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 21 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 9 & -7 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & -9 & 4 \end{vmatrix}$$

③＋①$\times(-4)$　　$\boxed{3}+\boxed{1}\times3$　　③＋①$\times(-1)$

展開

$$= -6\left\{0+1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -8 & 21 \end{vmatrix}+0\right\} + 6\left\{1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 21 \end{vmatrix}+0+0\right\}$$

$$+\left\{1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -9 & 4 \end{vmatrix}+0+0\right\}$$

$$= -6\cdot(-1)\cdot\{8\cdot21-1\cdot(-8)\} + 6\cdot(-1)\cdot\{9\cdot21-(-4)\cdot(-8)\} + \{8\cdot4-1\cdot(-9)\}$$

$$= 155$$

P.119　練習 7

⑴ $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1+0\cdot0\cdot0-1\cdot1\cdot0-1\cdot0\cdot1-0\cdot1\cdot1=2$

⑵ $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&6\\3&6&7\end{vmatrix}=1\cdot3\cdot7+2\cdot6\cdot3+3\cdot2\cdot6-1\cdot6\cdot6-2\cdot2\cdot7-3\cdot3\cdot3$

$=21+36+36-36-28-27=2$

⑶ $\begin{vmatrix}a&d&f\\0&b&e\\0&0&c\end{vmatrix}=abc+de\cdot0+f\cdot0\cdot0-ae\cdot0-d\cdot0\cdot c-fb\cdot0=abc$

P.120　練習 8

⑴ $$\begin{vmatrix}1&1&1\\bc&ca&ab\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}\overset{\substack{\boxed{2}+\boxed{1}\times(-1)\\ \boxed{3}+\boxed{1}\times(-1)}}{=\!=}\begin{vmatrix}1&0&0\\bc&ca-bc&ab-bc\\a^2&b^2-a^2&c^2-a^2\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}c(a-b)&b(a-c)\\(b+a)(b-a)&(c+a)(c-a)\end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(a-c)\begin{vmatrix}c&b\\-(b+a)&-(c+a)\end{vmatrix}\overset{\boxed{2}+\boxed{1}\times(-1)}{=\!=}(a-b)(a-c)\begin{vmatrix}c&b-c\\-(b+a)&b-c\end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(a-c)(b-c)\begin{vmatrix}c&1\\-(b+a)&1\end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(b-c)(c+a+b)$$

⑵ $$\begin{vmatrix}1&a&b\\1&b&a\\b&a&1\end{vmatrix}\overset{\boxed{1}+(\boxed{2}+\boxed{3})}{=\!=}\begin{vmatrix}a+b+1&a&b\\a+b+1&b&a\\a+b+1&a&1\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&a&b\\1&b&a\\1&a&1\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{②}+\text{①}\times(-1)\\ \text{③}+\text{①}\times(-1)}}{=\!=}(a+b+1)\begin{vmatrix}1&a&b\\0&b-a&a-b\\0&0&1-b\end{vmatrix}=(a+b+1)(a-b)\begin{vmatrix}1&a&b\\0&-1&1\\0&0&1-b\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+1)(a-b)\cdot1\cdot(-1)\cdot(1-b)=(a-b)(b-1)(a+b+1)$$

P.121　練習 9

(1) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \overset{\boxed{1}+(\boxed{2}+\boxed{3})}{=\!=} \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ x+2 & x & 1 \\ x+2 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

$$\overset{\substack{② + ① \times (-1) \\ ③ + ① \times (-1)}}{=\!=} (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)^2 = 0$$

したがって $x = 1,\ -2$

(2) $\begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 3 \\ 1 & 3 & 1-x \end{vmatrix} \overset{\boxed{1}+(\boxed{2}+\boxed{3})}{=\!=} \begin{vmatrix} 5-x & 1 & 1 \\ 5-x & 1-x & 3 \\ 5-x & 3 & 1-x \end{vmatrix} = (5-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 3 \\ 1 & 3 & 1-x \end{vmatrix}$

$$= (5-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 2 \\ 0 & 2 & -x \end{vmatrix} = (5-x)(x^2-4) = (5-x)(x+2)(x-2) = 0$$

したがって $x = 5,\ \pm 2$

(3) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \overset{\boxed{1}+(\boxed{2}+\boxed{3}+\boxed{4})}{=\!=} \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & 0 \\ x+1 & x-1 & 0 & 1 \\ x+1 & 0 & x-1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$

$$= (x+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \overset{\substack{② + ① \times (-1) \\ ③ + ① \times (-1) \\ ④ + ① \times (-1)}}{=\!=} (x+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & x-2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1)\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ -1 & x-2 & 1 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad x-1} \end{vmatrix} = (x+1)(x-1)\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix}$$

$\boxed{1}+\boxed{2}$

$$= (x+1)(x-1)\begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ x-3 & x-2 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1)(x-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1)(x-1)(x-3)(x-2-(-1))$$

$$= (x+1)(x-1)(x-3)(x-1) = (x+1)(x-1)^2(x-3)$$

したがって $x = \pm 1,\ 3$

P.123　練習 10

${}^tAA=E$ の両辺の行列式は等しいので，　$\left|{}^tAA\right|=|E|$

これより $\left|{}^tA\right||A|=1$，また ${}^t|A|=|A|$ より $|A|^2=1$

よって　$|A|=\pm1$

P.123　練習 11

$$|P^{-1}AP|=|P^{-1}||A||P|=\frac{1}{|P|}|A||P|=|A|$$

P.124　節末問題

1.

⑴　$\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}=1\cdot1-2\cdot3=-5$

行列式が 0 でないので，$\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$ は正則行列であり，逆行列は

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}1&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

⑵　$\begin{vmatrix}0&-2\\6&10\end{vmatrix}=0\cdot10-(-2)\cdot6=12$

行列式が 0 でないので，$\begin{pmatrix}0&-2\\6&10\end{pmatrix}$ は正則行列であり，逆行列は

$$\begin{pmatrix}0&-2\\6&10\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}10&-(-2)\\-6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}&\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

⑶　$\begin{vmatrix}1&-2\\-1&2\end{vmatrix}=1\cdot2-(-2)\cdot(-1)=0$

行列式が 0 であるから，$\begin{pmatrix}1&-2\\-1&2\end{pmatrix}$ は正則行列でない。

⑷　$\begin{vmatrix}4&2\\2&1\end{vmatrix}=4\cdot1-2\cdot2=0$

行列式が 0 であるから，$\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$ は正則行列でない。

P.124 節末問題　つづき

2.

⑴ $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&-3\\4&5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-3&-5\\4&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&-5\\1&2\end{vmatrix}=-6+5=-1$

⑵ $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&-3\\4&5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-3\\5&6\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&-3\\4&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&-1\\4&5\end{vmatrix}=(-6+15)-(12+12)+(10+4)=-1$

⑶ $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&-3\\4&5&6\end{vmatrix}=-6-12+10+15-12+4=-1$

3.

⑴ $\begin{vmatrix}1&2&-2\\8&1&3\\0&5&1\end{vmatrix}=1-80-15-16=-110$

⑵
$$\begin{vmatrix}1&4&3&2\\2&1&4&3\\3&2&1&4\\4&3&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&3&2\\0&-7&-2&-1\\0&-10&-8&-2\\0&-13&-10&-7\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}-7&-2&-1\\-10&-8&-2\\-13&-10&-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&7\\2&8&10\\7&10&13\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&7\\0&4&-4\\0&-4&-36\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}4&-4\\-4&-36\end{vmatrix}=16\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-9\end{vmatrix}=16(-9-1)=-160$$

⑶
$$\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\2&-1&-3&4\\0&-3&6&4\\4&5&7&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\0&-3&-7&6\\0&-3&6&4\\0&1&-1&6\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}-3&-7&6\\-3&6&4\\1&-1&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&6\\-3&6&4\\-3&-7&6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1&6\\0&3&22\\0&-10&24\end{vmatrix}$$
$$=-\begin{vmatrix}3&22\\-10&24\end{vmatrix}=-\{72-(-220)\}=-292$$

P.124　節末問題　つづき

4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ (b+c)^2 & (c+a)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ (b+c)^2 & (c+a)^2-(b+c)^2 & (a+b)^2-(b+c)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \\ (2c+a+b)(a-b) & (a+2b+c)(a-c) \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(c-a)\begin{vmatrix} -(b+a) & c+a \\ 2c+a+b & -(a+2b+c) \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(c-a)\begin{vmatrix} -(b+a) & c-b \\ 2c+a+b & c-b \end{vmatrix} = (a-b)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} -(b+a) & 1 \\ 2c+a+b & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(c-a)(c-b)\{-(b+a)-(2c+a+b)\}$$

$$= 2(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

5.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1-x \\ 0 & 1-x^2 & 1-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-x \\ 1-x^2 & 1-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-x)(1-x^2) = -(1-x)^2(1+x) = 0$$

したがって　$x = \pm 1$

6.

${}^tA = -A$ の両辺の行列式をとると　$|{}^tA| = |-A|$

$|{}^tA| = |A|,\ |-A| = (-1)^3|A| = -|A|$　より　$|A| = -|A|$

ゆえに　$2|A| = 0$　　よって　$|A| = 0$

P.126　演習 1

⑴　$(4,\ 3,\ 5,\ 2,\ 1) \to (1,\ 3,\ 5,\ 2,\ 4) \to (1,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4) \to (1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 4) \to (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

4 回の操作で基本順列に変形できる。したがって偶順列。

⑵　$(3,\ 6,\ 1,\ 4,\ 5,\ 2) \to (1,\ 6,\ 3,\ 4,\ 5,\ 2) \to (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$

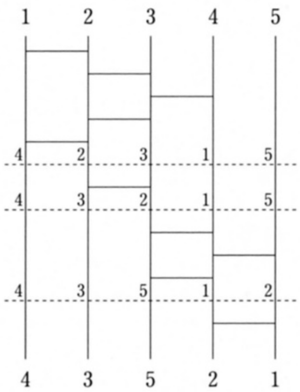
2 回の操作で基本順列に変形できる。したがって偶順列。

P.126　演習 2

順列の総数は $3! = 6$ 個あり，そのうち偶順列は，$(1,\ 2,\ 3)$，$(2,\ 3,\ 1)$，$(3,\ 1,\ 2)$であり，奇順列は，$(1,\ 3,\ 2)$，$(2,\ 1,\ 3)$，$(3,\ 2,\ 1)$である。

したがって　$a_{11}a_{12}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$　であるので 3 次の行列式の定義と一致する。

P.127　演習 3



横棒の本数は 10 本であるので偶順列である。