新版線形代数　改訂版　解答

２章　行列と連立１次方程式

１節　行列

P.68

練習１

⑴　4　　⑵　-7　　⑶　3

P.69

練習２

⑴　$a=4$，$b=5$，$c=3$，$d=-1$

⑵　両辺の成分を比較すると

$\begin{cases} a+c=6 \cdots ① \\ a+b=1 \cdots ② \\ a-b=3 \cdots ③ \end{cases}$　②＋③より　$a=2$　　これを②，①に代入し　$b=-1$，$c=4$

∴　$a=2$，$b=-1$，$c=4$

P.70

練習３

⑴　$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+(-2) & -3+5 \\ -2+3 & 4+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

⑵　$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+3 & -2+(-4) & -3+1 \\ 1+3 & -2+2 & 3+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

P.71

練習４

⑴　$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-5 & 1-(-3) \\ 3-7 & 0-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

⑵　$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 2 & 12 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-(-1) & -3-2 & 8-12 \\ 2-1 & 5-4 & 6-9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

P.71

練習５

$$X=A-B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-(-2) & -1-0 \\ 3-5 & 4-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

P.72

練習 6

⑴ $5A = 5\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\times 0 & 5\times 1 \\ 5\times 1 & 5\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

⑵ $\frac{1}{2}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\times 2 & \frac{1}{2}\times(-4) \\ \frac{1}{2}\times 0 & \frac{1}{2}\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

⑶ $-C = 5\begin{pmatrix} -1 & -0 \\ -7 & -(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$

⑷ $3A - 2B + C = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0-4+1 & 3-(-8)+0 \\ 3-0+7 & 0-4+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 11 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$

⑸ $2(A+B-C) - 3B + C = 2A - B - C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0-2-1 & 2+4+0 \\ 2+0-7 & 0-2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 61 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

P.73

練習 7

⑴ $X = \frac{1}{2}(3B - A) = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -10 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

⑵ $2X + Y = A$ $\cdots$①，$X - Y = B$ $\cdots$② とおくと

①＋②より $3X = A + B$

$\therefore\quad X = \frac{1}{3}(A+B) = \frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

①－②×2 より $3Y = A - 2B$

$\therefore\quad X = \frac{1}{3}(A-2B) = \frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

P.74　練習 8

⑴ $(2\ \ -3)\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\times 5 + (-3)\times 6 = -8$

⑵ $(\cos\theta\ \ \sin\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

P.74

練習 9

⑴ $$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\times(-2)+4\times 1 \\ 3\times(-2)+2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

⑵ $$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times 1+5\times 0 \\ 3\times 1+7\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

⑶ $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3+3\times(-2) \\ -1\times 3+(-4)\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

P.75

練習 10

⑴ $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3+1\times 4 & 2\times 2+1\times 1 \\ 3\times 3+4\times 4 & 3\times 2+4\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 25 & 10 \end{pmatrix}$$

⑵ $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2+3\times 0 & 1\times 1+3\times 3 \\ -6\times 2+7\times 0 & -6\times 1+7\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -12 & 15 \end{pmatrix}$$

⑶ $$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times(-2)-3\times 4 & 1\times 3-3\times(5) \\ -6\times(-2)+4\times 4 & -6\times 3+4\times(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 18 \\ 28 & -38 \end{pmatrix}$$

⑷ $$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1+a\times 0 & 1\times b+a\times 1 \\ 0\times 1+1\times 0 & 0\times b+1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P.75

練習 11

⑴ $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1+0 & 2+0+0 & 2-1-0 \\ 3+2+2 & 3+0+2 & 3-2-1 \\ 1+2+2 & 1+0+2 & 1-2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

⑵ $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+1 & 2+0-1 & 2-0+0 \\ 0-1+1 & 0-1-1 & 0+1+0 \\ 1+0+2 & 1+0-2 & 1-0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

P.76

練習 12

⑴ $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}=3\times1+2\times0+1\times(-3)=(0)$

⑵ $\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -3\\-5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\times4+1\times(-5) & -1\times(-3)+1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 5\end{pmatrix}$

⑶ $\begin{pmatrix}2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\3 & -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-3 & 0+4 & -2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -5\end{pmatrix}$

⑷ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & -1 & 2\\4 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2-3\\3-1-2\\4+1-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

P.77

練習 13

［1］ $(tA)B=\begin{pmatrix}0 & 3t\\t & 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 4\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0+9t & 0+6t\\-t+6t & 4t+4t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9t & 6t\\5t & 8t\end{pmatrix}$

$A(tB)=\begin{pmatrix}0 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-t & 4t\\3t & 2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+9t & 0+6t\\-t+6t & 4t+4t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9t & 6t\\5t & 8t\end{pmatrix}$

$t(AB)=t\left\{\begin{pmatrix}0 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 4\\3 & 2\end{pmatrix}\right\}=t\begin{pmatrix}0+9 & 0+6\\-1+6 & 4+4\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}9 & 6\\5 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9t & 6t\\5t & 8t\end{pmatrix}$

$\therefore\quad (tA)B=A(tB)=t(AB)$

［2］ $(AB)C=\begin{pmatrix}9 & 6\\5 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+6 & 18-6\\5+8 & 10-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 12\\13 & 2\end{pmatrix}$

$A(BC)=\begin{pmatrix}0 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}-1 & 4\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}0 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1+4 & -2-4\\3+2 & 6-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -6\\5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+15 & 0+12\\3+10 & -6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 12\\13 & 2\end{pmatrix}$

$\therefore\quad (AB)C=A(BC)$

練習 13　つづき

［３］　$(A+B)C=\begin{pmatrix}0-1 & 3+4\\ 1+3 & 2+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+7 & -2-7\\ 4+4 & 8-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -9\\ 8 & 4\end{pmatrix}$

$AC+BC=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -6\\ 5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3 & 0-3\\ 1+2 & 2-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -6\\ 5 & 4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -6\\ 5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -9\\ 8 & 4\end{pmatrix}$

$\therefore\quad (A+B)C=AC+BC$

$A(B+C)=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1+1 & 4+2\\ 3+1 & 2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 6\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+12 & 0+3\\ 0+8 & 6+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 3\\ 8 & 8\end{pmatrix}$

$AB+AC=\begin{pmatrix}9 & 6\\ 5 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -3\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 3\\ 8 & 8\end{pmatrix}$

$\therefore\quad A(B+C)=AB+AC$

P.77

練習 14

$AE=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+0 & 0+b\\ c+0 & 0+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=A$

$EA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+0 & b+0\\ 0+c & 0+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=A$

$\therefore\quad AE=EA=A$

P.78

練習 15

$AB=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-3 & 4+12\\ 16-6 & 8+24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 16\\ 10 & 32\end{pmatrix}$

$AC=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3 & 10+6\\ 4+6 & 20+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 16\\ 10 & 32\end{pmatrix}$

より，$AB=AC$，$A\neq O$の仮定を満たすが，明らかに，$B=C$の結論は満たさない。

P.78

練習 16

⑴ $A^2=\begin{pmatrix}3&6\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&6\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+6&18+12\\3+2&6+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&30\\5&10\end{pmatrix}$

これは　$A^2=5A$　…①　を意味するが，①の両辺に右から A をかけると

$A^3=5A^2=25A=25\begin{pmatrix}3&6\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}75&150\\25&50\end{pmatrix}$

これは　$A^3=25A$　…②　を意味するが，②の両辺に右から A をかけると

$A^4=25A^2=125A=125\begin{pmatrix}3&6\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}375&750\\125&250\end{pmatrix}$

⑵ $A^2=\begin{pmatrix}-3&7\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&7\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-7&-21+14\\3-2&-7+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-7\\1&-3\end{pmatrix}$,

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}2&-7\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&7\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+7&14-14\\-3+3&7-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

これは　$A^3=E$　…①　を意味するが，①の両辺に右から A をかけると

$A^4=A=\begin{pmatrix}-3&7\\-1&2\end{pmatrix}$

⑶ $A^2=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+0&0-0\\0-0&0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$,

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8+0&0-0\\0+0&0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}8&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16+0&0-0\\0-0&0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&0\\0&1\end{pmatrix}$

P.79

練習 17

証明

①　$n=1$ のとき

$A^1=A=\begin{pmatrix}4&1\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^1&1\cdot4^0\\0&4^1\end{pmatrix}$だから，$n=1$のとき成り立つ。

②　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると

$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix}4^k&k\cdot4^{k-1}\\0&4^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^{k+1}+0&4^k+k\cdot4^k\\0+0&0+4^{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^{k+1}&(k+1)\cdot4^{(k+1)-1}\\0&4^{k+1}\end{pmatrix}$

だから，$n=k+1$ のときも成り立つ。

①，②より，任意の正の整数 n について，$A^n=\begin{pmatrix}4^n&n\cdot4^{n-1}\\0&4^n\end{pmatrix}$が成り立つ。

P.79

練習 18

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & ac \\ bc & ab + c^2 \end{pmatrix} = O \quad \text{ならば}$$

$$\begin{cases} ab = 0 & \cdots ① \\ ac = 0 & \cdots ② \\ bc = 0 & \cdots ③ \\ ab + c^2 = 0 & \cdots ④ \end{cases}$$

①を④に代入すると　$c^2 = 0$　　∴　$c = 0$　…⑤

逆に，①，⑤が成り立てば $A^2 = O$　となる。

以上より，求める条件は　$c = ab = 0$

P.82

練習 19

⑴　$|A| = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 = 5 \neq 0$　より，逆行列は　$\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

⑵　$|A| = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 5$　より，逆行列は存在しない

⑶　$|A| = 4 \cdot (-4) - (-3) \cdot 0 = -1 \neq 0$　より，逆行列は　$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

⑷　$|A| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$　より，逆行列は　$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

⑸　$|A| = (a+1)(a-1) - a^2 \cdot 1 = -1 \neq 0$　より，逆行列は　$\begin{pmatrix} -a+1 & a^2 \\ 1 & -a-1 \end{pmatrix}$

⑹　$|A| = (a+1)^2 - (a-2)a = 4a + 1$　より

$a = -\dfrac{1}{4}$ のとき，逆行列は存在しない

$a \neq -\dfrac{1}{4}$ のとき，逆行列は $\dfrac{1}{4a+1}\begin{pmatrix} a+1 & -a+2 \\ -a & a+1 \end{pmatrix}$

P.82

練習 20

⑴　$x = 3$，$y = -4$

⑵　$x = 1$，$y = -2$

P.83

練習 21

⑴ $A^{-1}=\dfrac{1}{2\cdot 3-5\cdot 1}\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

⑵ $B^{-1}=\dfrac{1}{3\cdot 1-1\cdot 2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$

⑶ $A^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+10 & -3-15\\ -1-4 & 1+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -18\\ -5 & 7\end{pmatrix}$

⑷ $(AB)^{-1}=\left\{\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right\}^{-1}=\begin{pmatrix}6+10 & 2+5\\ 3+6 & 1+3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}16 & 7\\ 9 & 4\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{16\cdot 4-7\cdot 9}\begin{pmatrix}4 & -7\\ -9 & 16\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4 & -7\\ -9 & 16\end{pmatrix}$

P.83

練習 22

⑴ $X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2\cdot 2-3\cdot 1}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-0 & 2-6\\ -1+0 & -1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

⑵ $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\left\{\dfrac{1}{3\cdot 2-1\cdot 4}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{pmatrix}\right\}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2-8 & -1+6\\ 4-16 & -2+12\end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-6 & 5\\ -12 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & \frac{5}{2}\\ -6 & 5\end{pmatrix}$

P.84

練習 23

$P^{-1}=\dfrac{1}{1\cdot 3-(-2)\cdot(-1)}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$A^n=(PBP^{-1})^n=\overbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})}^{n\text{個}}=PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)BP^{-1}$

$=PB^nP^{-1}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n & -2\\ -2^n & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2^n-2 & 2^{n+1}-2\\ -3\cdot 2^n+3 & -2^{n+1}+3\end{pmatrix}$

P.85

練習 24

⑴ $${}^t\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

⑵ $${}^t\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

⑶ $${}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

⑷ $${}^t\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

⑸ $${}^t\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

⑹ $${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

P.86

練習 25

⑴ $${}^t(AB) = {}^t\left\{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\} = {}^t\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t(BA) = {}^t\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right\} = {}^t\begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$${}^tA\ {}^tB = {}^t\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}{}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$${}^tB\ {}^tA = {}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}{}^t\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

⑵ $${}^t(AB) = {}^t\left\{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right\} = {}^t\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}^t(BA) = {}^t\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\} = {}^t\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$${}^tA\ {}^tB = {}^t\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}{}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$${}^tB\ {}^tA = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}{}^t\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

P.86

練習 26　$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，${}^tA=(a'_{ij})$，$B=(b'_{ij})$ とおく。

　このとき，$a'_{ij}=a_{ji}$，$b'_{ij}=b_{ji}$ である。

［1］　証明

${}^t({}^tA)=(c_{ij})$ とおくと，$c_{ij}=a'_{ji}=a_{ij}$

任意のi，j について，$c_{ij}=a_{ij}$ が成り立つので　${}^t({}^tA)=A$

［2］　証明

${}^t(cA)=(c_{ij})$，$c\ {}^tA=(d_{ij})$ とおくと，$c_{ij}=ca_{ji}$，$d_{ij}=ca'_{ij}=ca_{ji}$　$\therefore$　$c_{ij}=d_{ij}$

任意の i，j について，$b_{ij}=c_{ij}$ が成り立つので　${}^t(cA)=c\ {}^tA$

［3］　証明

${}^t(A+B)=(c_{ij})$，${}^tA+{}^tB=(d_{ij})$ とおくと，$c_{ij}=a_{ji}+b_{ji}=d_{ij}$

任意のi，j について，$c_{ij}=d_{ij}$ が成り立つので　${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$

［4］　証明

${}^t(AB)=(c_{ij})$，${}^tB\ {}^tA=(d_{ij})$ とおくと，　$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{jk}b_{ki}$　　$d_{ij}=\sum_{k=1}^{m}b'_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^{m}a_{jk}b_{ki}$

$\therefore$　$c_{ij}=d_{ij}$

任意のi，j について，$c_{ij}=d_{ij}$ が成り立つので　${}^t(AB)={}^tB\ {}^tA$

P.87

練習 27

仮定より，A は対称行列なので　${}^tA=A$ が成り立つ。

転置行列の性質より，${}^t({}^tA)=A={}^tA$ だから，${}^tA$ も対称行列である。

また，${}^tE=E$ より

${}^t(A^{-1})A={}^t(A^{-1})\ {}^tA={}^t(AA^{-1})={}^tE=E$,

$A\ {}^t(A^{-1})={}^tA\ {}^t(A^{-1})={}^t(A^{-1}A)={}^tE=E$

${}^t(A^{-1})A=A\ {}^t(A^{-1})=E$ なので ${}^t(A^{-1})$ は A の逆行列である。

$\therefore$　${}^t(A^{-1})=A^{-1}$　よって，A^{-1}も対称行列である。

P.87

練習 28

仮定より，A は交代行列なので　${}^tA=-A$ が成り立つ。

転置行列の性質より，${}^t({}^tA)=A=-(-A)=-{}^tA$ だから，${}^tA$ も交代行列である。

また，${}^tE=E$，$-(A^{-1})=(-A)^{-1}$より

${}^t(A^{-1})(-A)={}^t(A^{-1})\ {}^tA={}^t(AA^{-1})={}^tE=E$,

$(-A)\ {}^t(A^{-1})={}^tA\ {}^t(A^{-1})={}^t(A^{-1}A)={}^tE=E$,

${}^t(A^{-1})(-A)=(-A)\ {}^t(A^{-1})=E$ なので ${}^t(A^{-1})$ は $-A$ の逆行列である。

$\therefore$　${}^t(A^{-1})=(-A)^{-1}=-(A^{-1})$　よって，A^{-1} も交代行列である。

P.88

練習 29

$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$とおくと，$|A|=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より，$A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}={}^tA$

よって，A は直交行列である。

P.89

練習 30

$A=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix}a \\ c\end{pmatrix}$，$\vec{w}=\begin{pmatrix}b \\ d\end{pmatrix}$とおくと，仮定より，$A$ は直交行列なので ${}^tAA=E$

よって$\begin{pmatrix}a & c \\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{cases} a^2+c^2=1 & \cdots① \\ ab+cd=0 & \cdots② \\ b^2+d^2=1 & \cdots③ \end{cases}$$

①，③より，$|\vec{v}|=\sqrt{a^2+c^2}=1$，$|\vec{w}|=\sqrt{b^2+d^2}=1$

また，②より，$\vec{v}\cdot\vec{w}=ab+cd=0$

以上より，A の列ベクトルは，大きさが1で，互いに直交する。

P.90

節末問題

1

⑴ $3A-2B+C=3\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}3-4+1 & 0-2+1 & 9-2+2 \\ -3-2+0 & 6-2-1 & 3-6+5 \\ 6-6+0 & 3-6-2 & 12-4-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 9 \\ -5 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 11\end{pmatrix}$$

⑵ $A-BC=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2+0+0 & 2-1-2 & 4+5+3 \\ 1+0+0 & 1-1-6 & 2+5+9 \\ 3+0+0 & 3-3-4 & 6+15+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1 & 12 \\ 1 & -6 & 16 \\ 3 & -4 & 27\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -9 \\ -2 & 8 & -15 \\ -1 & 5 & -23\end{pmatrix}$$

P.90 節末問題

１　つづき

⑶　$$2A+{}^tB-3C=2\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&2&1\\2&1&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&3\\1&1&3\\1&3&2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&5\\0&-2&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+2-3&0+1-3&6+3-6\\-2+1-0&4+1+3&2+3-15\\4+1-0&2+3+6&8+2-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-1&8&-10\\5&11&1\end{pmatrix}$$

P.90

２

⑴　$$A(B+C)=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}2&-1\\3&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\6&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+18&0+9\\2+24&0+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&9\\26&12\end{pmatrix}$$

⑵　$$ABC=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+9&-1+15\\4+12&-2+20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}11&14\\16&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11+42&11-28\\-16+54&16-36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31&-17\\38&-20\end{pmatrix}$$

⑶　$${}^tA\ {}^tB\ {}^tC=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2&3+10\\6-4&9+20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&13\\2&29\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+13&0-26\\-2+29&6-58\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&-26\\27&-52\end{pmatrix}$$

⑷　$$C^{-1}AC=\frac{1}{2-3}\begin{pmatrix}-2&-1\\-3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+2&6+4\\3+2&9+4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&10\\5&13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4+30&4-20\\-5+39&5-26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26&-16\\34&-21\end{pmatrix}$$

P.90

３

⑴ $A^2=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$

$n\geqq 4$ のとき $A^n=A^{n-3}A^3=A^{n-3}O=O$

以上より，$A^1=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，　$n\geqq 3$ のとき $A^n=O$

⑵ ① $n=2$のとき

$A^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

② $n=k$のとき $A^k=A^2$ とすると

$A^{k+1}=A^kA=A^2A=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A^2$

数学的帰納法により，任意の $n\geqq 2$ について，$A^n=A^2$

以上より，$A^1=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$n\geqq 2$ のとき $A^n=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

P.90

４

$|A|=0$ となる kを求めればよい。

⑴ $|A|=3-2k=0$　∴　$k=\dfrac{3}{2}$

⑵ $|A|=4k^2-36=0$　∴　$k^2-9=0$　∴　$k=\pm 3$

⑶ $|A|=2(k^2+1)+5k=0$　∴　$2k^2+5k+2=0$　∴　$(2k+1)(k+2)=0$　∴　$k=-\dfrac{1}{2}$，-2

P.90

５

⑴ 仮定より，S_1，S_2 は対称行列なので　${}^tS_1 = S_1$，${}^tS_2 = S_2$

転置行列の性質より，${}^t(S_1 + S_2) = {}^tS_1 + {}^tS_2 = S_1 + S_2$

よって，$S_1 + S_2$ は対称行列である。

⑵ 仮定より，A_1 と A_2 は交代行列なので　${}^tA_1 = -A_1$，${}^tA_2 = -A_2$

転置行列の性質より，${}^t(A_1 + A_2) = {}^tA_1 + {}^tA_2 = -A_1 - A_2 = -(A_1 + A_2)$

よって，$A_1 + A_2$ は交代行列である。

⑶ 仮定より，S，P はそれぞれ対称行列，交代行列なので　${}^tS = S$，${}^tP = P^{-1}$

転置行列の性質より，${}^t(P^{-1}SP) = {}^tP\ {}^tS\ {}^t(P^{-1}) = {}^tP\ {}^tS\ {}^t({}^tP) = P^{-1}SP$

よって，$P^{-1}SP$ は対称行列である。

P.90

６

$$ {}^t\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E $$

同様にして，$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}{}^t\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ も成り立つ。

よって，任意の θ について，A は直交行列である。