１章　ベクトル　解答

２節　空間ベクトル

P.40 練習１

⑴　$\mathrm{OA}=\sqrt{(2-0)^2+(-4-0)^2+(5-0)^2}=3\sqrt{5}$

⑵　$\mathrm{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(1-3)^2+(5+1)^2}=7$

P.40 練習２

⑴　$\mathrm{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(-2)^2+0^2}=2\sqrt{2}$

$\mathrm{AC}=\sqrt{(1-1)^2+(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\mathrm{BC}=\sqrt{(1-3)^2+(-2+2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

よって正三角形。

⑵　$\mathrm{AB}=\sqrt{(2-3)^2+(-1)^2+(1+3)^2}=3\sqrt{2}$

$\mathrm{BC}=\sqrt{(1-2)^2+(1+1)^2+(-1-1)^2}=3$

$\mathrm{CA}=\sqrt{(1-3)^2+1^2+(-1+3)^2}=3$

よって　$\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{2}$　の直角二等辺三角形

P.41 練習３

$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

一方　$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=-\vec{b}+\vec{a}-\vec{c}$

P.42 練習４

⑴　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ 0,\ 0)+(0,\ -2,\ 0)+(0,\ 0,\ 2)$

$=\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2}+2\overrightarrow{e_3}$

⑵　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ -2,\ 2)$ なので $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$

P.43 練習 5

⑴ $\vec{a}-\vec{b}=\left(1+2,\ \ -2-3,\ \ 3-1\right)=\left(3,\ \ -5,\ \ 2\right)$

⑵ $\vec{a}-2\vec{b}=\left(1,\ \ -2,\ \ 3\right)+\left(4,\ \ -6,\ \ -2\right)=\left(5,\ \ -8,\ \ 1\right)$

⑶ 与式$=3\vec{a}-3\vec{b}-\vec{a}+4\vec{b}=2\vec{a}+\vec{b}=\left(2,\ \ -4,\ \ 6\right)+\left(-2,\ \ 3,\ \ 1\right)=\left(0,\ \ -1,\ \ 7\right)$

P.43 練習 6

$\vec{a}=2\vec{b}$ となればよい。

$\left(x-4,\ \ x,\ \ 4\right)=2\left(y,\ \ z,\ \ x\right)=\left(2y,\ \ 2z,\ \ 2x\right)$ より $\begin{cases} x-4=2y \\ x=2z \\ 4=2x \end{cases}$

よって　$x=2,\ \ y=-1,\ \ z=1$

P.44 練習 7

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(2,\ \ 1,\ \ 2\right)-\left(1,\ \ 2,\ \ 2\right)=\left(1,\ \ -1,\ \ 0\right)$ よって $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2+0^2}=\sqrt{2}$

⑵ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(3,\ \ 2,\ \ 1\right)-\left(2,\ \ 1,\ \ 2\right)=\left(1,\ \ 1,\ \ 1\right)$ よって $\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\sqrt{1^2+1^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{3}$

⑶ $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(1,\ \ 1,\ \ 1\right)-\left(3,\ \ 2,\ \ 1\right)=\left(-2,\ \ -1,\ \ 0\right)$

よって $\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|=\sqrt{\left(-2\right)^2+\left(-1\right)^2+0^2}=\sqrt{5}$

P.44 練習 8

D を$\left(x,\ \ y,\ \ z\right)$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ が成り立てばよいので

$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(2-x,\ \ 3-y,\ \ -2-z\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(0,\ \ 7,\ \ 4\right)$ より

$\begin{cases} 2-x=0 \\ 3-y=7 \\ -2-z=4 \end{cases}$ として $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \\ z=-6 \end{cases}$

P.45 練習 9

$\vec{b}=k\vec{a}$ （k は実数）とすると $\left(l,\ \ -4,\ \ m\right)=\left(-k,\ \ 2k,\ \ 4k\right)$ より $\begin{cases} l=k \\ -4=2k \\ m=4k \end{cases}$

よって　$k=-2$ より $\begin{cases} l=2 \\ m=-8 \end{cases}$

P.45 練習 10

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2+1^2+\left(-2\right)^2} = 3$ より同じ向きの単位ベクトルは　$\dfrac{1}{3}\left(2,\ 1,\ -2\right) = \left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$

逆向きの単位ベクトルは　$\dfrac{-1}{3}\left(2,\ 1,\ -2\right) = \left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

P.46 練習 11

$\vec{q} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$　とおくと

$$\begin{aligned}\left(1,\ 2,\ -6\right) &= s\left(0,\ -1,\ 4\right) + t\left(3,\ -1,\ 2\right) + u\left(-2,\ 0,\ 2\right)\\ &= \left(0,\ -5,\ 4s\right) + \left(3t,\ -t,\ 2t\right) + \left(-2u,\ 0,\ 2u\right)\\ &= \left(3t-2u,\ -s-t,\ 4s+2t+2u\right)\end{aligned}$$

であるから　$\begin{cases} 3t-2u=1 \\ -s-t=2 \\ 4s+2t+2u=-6 \end{cases}$　よって　$\begin{cases} s=-5 \\ t=3 \\ u=4 \end{cases}$　従って　$\vec{q} = -5\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$

P.47 練習 12

⑴　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\cdot\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4} = 1$

⑵　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CG} = 1\cdot 1\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

⑶　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{3} = 1$

⑷　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CF} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\dfrac{2}{3} = -1$

P.48 練習 13

⑴　$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 4 + \left(-3\right)\cdot 3 + 1\cdot 5 = 4$

⑵　$\vec{a}\cdot\vec{b} = -1\cdot 2 + 2\cdot\left(-5\right) + 3\cdot 4 = 0$

P.49 練習 14

⑴　$\vec{a}\cdot\vec{b} = -1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot\left(-2\right) = -3,$

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(-1\right)^2+0^2+1^2} = \sqrt{2},\quad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{1^2+2^2+\left(-2\right)^2} = 3$　より　$\cos\theta\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{-3}{\sqrt{2}\cdot 3} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$　より　$\theta = \dfrac{3}{4}\pi\ \left(=135^\circ\right)$

⑵　$\vec{a}\cdot\vec{b} = 5\cdot 1 + \left(-3\right)\cdot 4 + 1\cdot 7 = 0,$　よって　$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = 0$,　$0 \leqq \theta \leqq \pi$　より　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

P.50 練習 15

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直なベクトルを $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とおくと

$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{p}=2x+y-2z=0\\ \vec{b}\cdot\vec{p}=x-y-z=0\end{cases}$ より $\begin{cases}z=x\\ y=0\end{cases}$ である。

$x=1$ とすると $\begin{cases}z=1\\ y=0\end{cases}$ であるので $\vec{p}=(1,\ 0,\ 1)$

$\left|\vec{p}\right|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$ より求める単位ベクトルは $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ 1)$

つまり $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ と $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

P.51 練習 16

⑴ $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{a}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2$

なぜなら $\vec{a}\perp\vec{b}$ より $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，同様 $\vec{b}\cdot\vec{c}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=0$

⑵ $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\vec{c}$ より $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$ である。よって $\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ より $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ ㋐

$\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\perp\vec{a}$ より $\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=0$ であるから $\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ ㋑

よって $\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}$ （㋐，㋑より）

$=0$ 従って $\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\perp\vec{b}$

⑶ $\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}=\left(\overline{\mathrm{AO}}+\overline{\mathrm{OB}}\right)\cdot\left(\overline{\mathrm{AO}}+\overline{\mathrm{OC}}\right)=\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(-\vec{a}+\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$=3^2-\left|\vec{a}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\dfrac{\pi}{3}-\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|\cos\dfrac{\pi}{3}+\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\dfrac{\pi}{3}=9-3\cdot6\cdot\dfrac{1}{2}-4\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}+4\cdot6\cdot\dfrac{1}{2}$

$=6$

P.53 練習 17

⑴ $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

よって P は $\dfrac{1(1,\ -3,\ 7)+2(-5,\ 9,\ 1)}{3}=\dfrac{(1-10,\ -3+18,\ 7+2)}{3}=(-3,\ 5,\ 3)$

⑵ $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

よって M は $\dfrac{(1,\ -3,\ 7)+(-5,\ 9,\ 1)}{2}=\dfrac{(-4,\ 6,\ 8)}{2}=(-2,\ 3,\ 4)$

⑶ $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{(-1)\vec{a}+2\vec{b}}{2+(-1)}=-\vec{a}+2\vec{b}$ よって Q は

$-(1,\ -3,\ 7)+2(-5,\ 9,\ 1)=(-1-10,\ 3+18,\ -7+2)=(-11,\ 21,\ -5)$

P.53 練習 18

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

よって G は $\dfrac{(1,\ 3,\ 2)+(-8,\ 2,\ -1)+(4,\ -5,\ 6)}{3}=\dfrac{(1-8+4,\ 3+2-5,\ 2-1+6)}{3}$

$=\left(-1,\ 0,\ \dfrac{7}{3}\right)$

P.54 練習 19

点 O を基点とする位置ベクトルを $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\quad \overrightarrow{OB}=\vec{b},\quad \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

M, N はそれぞれ, 辺 OA, BC の中点だから $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\vec{a}}{2},\quad \overrightarrow{ON}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

線分 MN の中点を D とすると

$\overrightarrow{OD}=\dfrac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}}{2}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$ …… ①

一方, P, Q はそれぞれ, 辺OC, AB の中点だから $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{c}}{2},\quad \overrightarrow{OQ}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

線分 PQ の中点を E とすると

$\overrightarrow{OE}=\dfrac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$ …… ②

したがって①, ②から$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}$となり, O を基点とする 2 点 D, E の位置ベクトルが一致する。
よって, 線分 MN の中点と線分 PQ の中点は一致する。

P.55 練習 20

G′ は△ABC の重心だから　$\overrightarrow{OG'} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$

また　$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

したがって　$\overrightarrow{OG'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OD}$

よって，　3 点 O,　G′,　D は同一直線上にある。

P.57 練習 21

⑴　方向ベクトルが $(2,\ 1,\ 3)$ で $(1,\ 3,\ -1)$ を通るので

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-(-1)}{3} \quad \text{より} \quad \frac{x-1}{2} = y-3 = \frac{z+1}{3}(=t) \quad \text{よって} \quad \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t+3 \\ z = 3t-1 \end{cases}$$

⑵　方向ベクトルが $(1,\ -1,\ 4)$ で $(3,\ -7,\ 2)$ を通るので

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+7}{-1} = \frac{z-2}{4} \quad \text{より} \quad x-3 = -y-7 = \frac{z-2}{4}(=t) \quad \text{よって} \quad \begin{cases} x = t+3 \\ y = -t-7 \\ z = 4t+2 \end{cases}$$

P.57 練習 22

⑴　方向ベクトルは $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = (-1,\ -2,\ -4)+(3,\ -4,\ 1)=(2,\ -6,\ -3)$ で
$A(1,\ 2,\ 4)$ を通るので

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-4}{-3}(=t) \quad \text{よって} \quad \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -6t+2 \\ z = -3t+4 \end{cases}$$

⑵　方向ベクトルは $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = (2,\ 0,\ -5)+(-1,\ 3,\ 2)=(1,\ 3,\ -3)$ で
$A(-2,\ 0,\ 5)$ を通るので

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-5}{-3} \quad \text{より} \quad x+2 = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{-3}(=t) \quad \text{よって} \quad \begin{cases} x = t-2 \\ y = 3t \\ z = -3t+5 \end{cases}$$

⑶　方向ベクトルは $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = (-4,\ -5,\ -2)+(3,\ 1,\ 2)=(-1,\ -4,\ 0)$ で
$A(4,\ 5,\ 2)$ を通るので

$$\frac{x-4}{-1} = \frac{y-5}{-4},\quad z-2=0 \quad \text{より} \quad x-4 = \frac{y-5}{4},\quad z=2$$

$$x-4 = \frac{y-5}{4} = t \quad \text{とおいて} \quad \begin{cases} x = t+4 \\ y = 4t+5 \\ z = 2 \end{cases}$$

P.57 練習 23

⑴ 与式より $\dfrac{x-1}{3}=t,\quad \dfrac{y-2}{-4}=t,\quad \dfrac{z-3}{-5}=t$ なので $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-3}{-5}$

よって $\overrightarrow{u_1}=\left(3,\ -4,\ -5\right)$

⑵ l_2 の方向ベクトルの一つは $\left(1,\ 7,\ 10\right)$ よって大きさは $\sqrt{1^2+7^2+10^2}=5\sqrt{6}$

従って $\overrightarrow{u_2}\ \dfrac{\pm 1}{5\sqrt{6}}\left(1,\ 7,\ 10\right)$

⑶ $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}}{\left|u_1\right|\left|u_2\right|}=\dfrac{\left\{3\cdot 1+\left(-4\right)\cdot 7+\left(-5\right)\cdot 10\right\}\cdot\dfrac{\pm 1}{5\sqrt{6}}}{\sqrt{3^2+\left(-4\right)^2+\left(-5\right)^2}\cdot 1}=\dfrac{\mp 75}{5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{6}}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta>0$ なので $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ よって $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

P.58 練習 24

⑴ $x,\ y,\ z$ の係数より $\left(2,\ 3,\ 5\right)$

⑵ $x,\ y,\ z$ の係数より $\left(1,\ -2,\ 4\right)$

P.58 練習 25

⑴ $1\left(x-\left(-1\right)\right)+2\left(x-2\right)+\left(-3\right)\left(x-3\right)=0$ より $x+2y-3z+6=0$

⑵ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(0,\ 1,\ -1\right)+\left(1,\ 0,\ -1\right)=\left(1,\ 1,\ -2\right)$ が法線ベクトルで

$\mathrm{A}\left(0,\ -1,\ 1\right)$ を通るので

$1\left(x-0\right)+1\left(y-\left(-1\right)\right)+\left(-2\right)\left(z-1\right)=0$ より $x+y-2z+3=0$

P.58 練習 26

⑴ $\left(x-2\right)^2+\left(y-\left(-3\right)\right)^2+\left(z-1\right)^2=4^2$ より $\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2+\left(z-1\right)^2=16$

⑵ $\left(x-0\right)^2+\left(y-0\right)^2+\left(z-0\right)^2=\sqrt{5}^2$ より $x^2+y^2+z^2=5$

P.59 練習 27

⑴ $(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}^2$ より $x^2+y^2+z^2=9$

⑵ 中心と xy 平面 $(z=0)$ との距離が半径 r なので $r=2$

よって $(x-(-1))^2+(y-4)^2+(z-2)^2=2^2$ より $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=4$

⑶ 中心は与えられた 2 点の中点 $\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{-2+0}{2},\ \dfrac{5+5}{2}\right)=(3,\ -1,\ 5)$ であり,

この点と $(4,\ 0,\ 5)$ との距離 $\sqrt{(3-4)^2+(-1-0)^2+(5-5)^2}$ が半径なので

$(x-3)^2+(y-(-1))^2+(z-5)^2=\sqrt{2}^2$ より $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=2$

P.60 節末問題

P.60 1.

C を $(x,\ y,\ z)$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(x-2,\ y+1,\ z-1)$ である。

一方 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(4-1,\ 5-1,\ -1+1)=(3,\ 4,\ 0)$ であり

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より $x=5,\ y=3,\ z=1$ なので $\mathrm{C}(5,\ 3,\ 1)$

P.60 2.

$k\vec{a}=\vec{b}$ となる次数 k を求める。

$k(1,\ -3,\ 5)=(x-1,\ 6,\ y)$ とおくと $\begin{cases} k=x-1 \\ -3k=6 \\ 5k=y \end{cases}$ よって $k=-2$ であり $x=-1,\ \ y=-10$

P.60 3.

$s(0,\ 1,\ 2)+t(-3,\ 0,\ 1)+u(-2,\ 3,\ 0)=(-3t-2u,\ s+3u,\ 2s+t)$

$=(2,\ 18,\ 2)$ とおくと $\begin{cases} -3t-2u=2 \\ s+3u=18 \\ 2s+t=2 \end{cases}$ これを解いて $\begin{cases} s=3 \\ t=-4 \\ u=5 \end{cases}$

よって $\vec{p}=3\vec{a}-4\vec{b}+5\vec{c}$

P.60 節末問題

P.60　4.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-5)+(-1)\cdot 4-2\cdot 3=-15$ であり

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$，$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(-5)^2+4^2+3^2}=5\sqrt{2}$ なので

$\cos\theta=\dfrac{-15}{\sqrt{6}\cdot 5\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$　$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-15$,　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

P.60　5.

求めるベクトルを $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とすると

$\vec{p}\cdot\vec{a}=2x-2y+1z=0$,　$\vec{p}\cdot\vec{b}=2x+3y-4z=0$ より $\begin{cases} y=z \\ z=2z \end{cases}$

$x=1$ とすると $y=2$,　$z=2$ なので，このとき $\vec{p}=(1,\ 2,\ 2)$ で $\left|\vec{p}\right|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$

また，$-\vec{p}$ も題意をみたすので答は $(1,\ 2,\ 2)$，$(-1,\ -2,\ -2)$

P.60　6.

A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと

G は△ABC の重心であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

M は辺 OC の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{MG}}=\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{-\vec{c}}{2}+\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\dfrac{2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}}{6}$

一方，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\vec{b}$ より $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{-\vec{c}}{2}+\vec{a}+\vec{b}=\dfrac{2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}}{2}$

これより $3\overrightarrow{\mathrm{MG}}=\mathrm{M}\vec{p}$　よって M，G，P は同一直線上の点である。

P.60 節末問題

P.60　7.

点 O を基点とする 3 点 A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，　$\vec{b}$，　$\vec{c}$ とすると

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$，　$\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$，　$\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}$　ここで　$OA\perp BC$，　$OB\perp CA$ であるから

$\vec{a}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=0$，　$\vec{b}\cdot\left(\vec{a}-\vec{c}\right)=0$

したがって

$\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0\cdots①$

$\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0\cdots②$

①+②より　$\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

これより $\vec{c}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=0$

すなわち $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

ここで $\overrightarrow{OC}\neq\vec{0}$，　$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ であるから，　$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$

よって　$OC\perp AB$

P.60　8.

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(2\quad -1\quad 1\right)\cdot\left(x-2\quad -x\quad 4\right)}{\sqrt{2^2\left(-1\right)^2+1^2}\sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(-x\right)^2+4^2}}$$

$$=\frac{2x-4+x+4}{\sqrt{6}\sqrt{\left(x-2\right)^2+x^2+16}}=\frac{3x}{\sqrt{6}\sqrt{2x^2-4x+20}}$$

よって　$\frac{3}{4}\cdot 6\left(2x-4x+20\right)=9x^2$

従って　$-4x+20=5$　よって　$x=5$

P.61　節末問題

P.61　9.

⑴　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\frac{\pi}{3}$

$=l\cdot l\cdot\frac{1}{2}$ より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}l^2$

⑵　⑴より　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}l^2$

同様に　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}l^2$　よって

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=\frac{1}{2}l^2-\frac{1}{2}l^2=0$

$\overrightarrow{OA}\neq 0$　$\overrightarrow{BC}\neq 0$ より $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$

よって　$OA\perp BC$

P.61　節末問題

P.61　9.

⑶　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$　とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\frac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\quad\cdots①$$

よって，$\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right)^2=\dfrac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\cdot\dfrac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}=\dfrac{1}{4}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+2\left(-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\right)$

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=l\cdot l\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}l^2\quad\cdots②\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(l^2+l^2+l^2-l^2\right)=\frac{1}{2}l^2$$

よって　$\left|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}l$

⑷　なす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}=\frac{\frac{1}{2}\left(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\vec{b}}{\frac{1}{\sqrt{2}}l\cdot l}\quad\left(①\text{より}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(-\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2+\vec{c}\cdot\vec{b}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}l^2}\quad\left(②\text{より}\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{b}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{l^2}{l^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$45^\circ=\dfrac{\pi}{4}$

P.61　10.

⑴　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(-1,\ 1,\ 0\right)+\left(2,\ 2,\ 0\right)$　より　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\left(1,\ 3,\ 0\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(-1,\ 1,\ 0\right)+\left(2,\ -3,\ \sqrt{5}\right)$　より　$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\left(1,\ -2,\ \sqrt{5}\right)$

⑵　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|}=\dfrac{1\cdot1+3\cdot\left(-2\right)+0\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{1^2+3^2+0^2}\sqrt{1^2+\left(-2\right)^2+\sqrt{5}^2}}=\dfrac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$　より　$\theta=120^\circ=\dfrac{2}{3}\pi$

⑶　⑴より　$\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|=\sqrt{10}$　一方　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$　より　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$　より　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\times\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|\times\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|\times\sin\theta=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

P.61 節末問題

P.61　11.

⑴　直線 AB の方程式は

方向ベクトルが　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-1,\ 1,\ -5)+(4,\ 5,\ 2)=(3,\ 6,\ -3)$　$\mathrm{A}(1,\ -1,\ 5)$

を通ることより　$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{6}=\dfrac{z-5}{-3}$　…①

xy 平面上の点はすべて $z=0$ であるから　$z=0$ を代入して　$x=6,\ y=9$

よって　$(6,\ 9,\ 0)$

⑵　①$=t$ とおくと $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=6t-1 \\ z=-3t+5 \end{cases}$　…②　よって直線 AB 上の任意点 $(x,\ y,\ z)$ と原点との距離は

$$\begin{aligned}\sqrt{(3t+1)^2+(6t-1)^2+(-3t+5)^2}&=\sqrt{54t^2-36t+27}\\&=3\sqrt{6t^2-4t+3}\\&=3\sqrt{6\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

よって　$t=\dfrac{1}{3}$ のとき最小

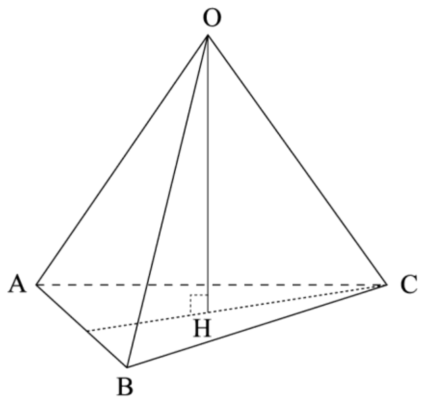
このとき②より $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$

よって　$(2,\ 1,\ 2)$

P.61　12.

OH は O から平面 ABC に引いた垂線であるから，OH と平面 ABC は垂直である。

辺 BC は，平面 ABC 上にあるから　OH ⊥ BC



したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$　…①

また，仮定より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$　…②

①，②より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\neq\vec{0}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

よって　AH ⊥ BC

P.61　13.

⑴ $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)$

$=\left|\vec{a}\right|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=\sqrt{\left(-1\right)^2+0^2+1^2}^{\,2}+t\left(-1\cdot3+0,\quad\left(-2\right)+1\cdot1\right)$

$=-2t+2$

⑵ $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$

$=\left(-1\quad0\quad1\right)+\left(3t,\quad-2t,\quad t\right)=\left(-1+3t,\quad-2t,\quad1+t\right)$

より　$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{c}\right|}$

$=\dfrac{-2t+2}{\sqrt{\left(-1\right)^2+0^2+1^2}\sqrt{\left(-1+3t\right)^2+\left(-2t\right)^2+\left(1+t\right)^2}}$

$=\dfrac{-2t+2}{\sqrt{2}\sqrt{14t^2-4t+2}}$

$=\dfrac{-t+1}{\sqrt{7t^2-2t+1}}$

よって　$\dfrac{1}{4}=\dfrac{t^2-2t+1}{7t^2-2t+1}$

$3t^2+6t-3=0$

従って　$t=-1\pm\sqrt{2}$

P.62 演習 1

$h=\dfrac{|2\cdot(-1)-3\cdot(-2)-9|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{|-5|}{\sqrt{13}}=\dfrac{5}{\sqrt{13}}$

P.63 演習 2

$h=\dfrac{\left|3\cdot1+2\cdot2-\left(-3\right)+4\right|}{\sqrt{3^2+2^2+\left(-1\right)^2}}=\dfrac{\left|14\right|}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$