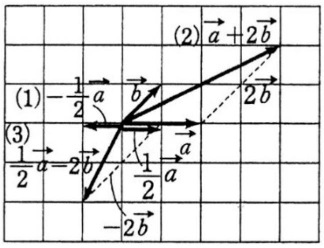
１章　ベクトル　解答

１節　平面ベクトル

P.11 練習１




P.12 練習２

⑴　$2\vec{a}-4\vec{b}-3\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}-5\vec{b}$

⑵　$6\vec{a}-3\vec{b}-2\vec{a}-4\vec{b}=4\vec{a}-7\vec{b}$

P.12 練習３

⑴　$3\vec{x}=3\vec{a}+9\vec{b}$ より

$\vec{x}=\vec{a}+3\vec{b}$

⑵　$2\vec{x}+4\vec{b}-3\vec{x}-3\vec{a}=0$ より

$\vec{x}=-3\vec{a}+4\vec{b}$

P.13 練習４

⑴　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\vec{a}$

⑵　$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=2\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2\overrightarrow{\mathrm{AF}}=2\vec{b}$

⑶　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AO}}=2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}})$

$=2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}})=2\vec{a}+2\vec{b}$

P.13 練習５

⑴　$\pm\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

⑵　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=\sqrt{5^2+12^2}=13$　より

$\frac{\pm1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\pm\frac{1}{13}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

P.15 練習 6

⑴ $\vec{a}+3\vec{b}=(3,\ 1)+3(-2,\ 1)=(3,\ 1)+(-6,\ 3)=(-3,\ 4)$

$\left|\vec{a}+3\vec{b}\right|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

⑵ $2\vec{a}-\vec{b}=2(3,\ 1)-(-2,\ 1)=(6,\ 2)+(2,\ -1)=(8,\ 1)$

$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{8^2+1^2}=\sqrt{65}$

⑶ $5\vec{a}-2(-\vec{b}+3\vec{a})=5\vec{a}+2\vec{b}-6\vec{a}$

$=-\vec{a}+2\vec{b}$

$=-(3,\ 1)+2(-2,\ 1)$

$=(-7,\ 1)$

$\left|5\vec{a}-2(-\vec{b}+3\vec{a})\right|=\sqrt{(-7)^2+1^2}=5\sqrt{2}$

P.16 練習 7

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ 4)$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

⑵ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=(1,\ -2)-(3,\ 4)=(-2,\ -6)$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=2\sqrt{10}$

⑶ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=(-5,\ -4)-(1,\ -2)=(-6,\ -2)$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$

⑷ $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$=(3,\ 4)-(-5,\ 4)=(8,\ 8)$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$

P.16 練習８

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(x,\ \ 1\right)-\left(2,\ \ 3\right)=\left(x-2,\ \ -2\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(0,\ \ y\right)-\left(-3,\ \ 4\right)=\left(3,\ \ y-4\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のとき $x-2=3$ かつ $-2=y-4$

なので $x=5,\ \ y=2$

P.17 練習９

⑴ $\overrightarrow{p}=2\left(3,\ \ -1\right)+3\left(-1,\ \ 2\right)=\left(6,\ \ -2\right)+\left(-3,\ \ 6\right)=\left(3,\ \ 4\right)$

$\overrightarrow{q}=\left(-1,\ \ 2\right)+3\left(7,\ \ 6\right)=\left(6,\ \ 8\right)$ よって $\overrightarrow{q}=2\overrightarrow{p}$ なので $\overrightarrow{p}\,/\!/\,\overrightarrow{q}$

⑵ $\overrightarrow{p}=\left(3,\ \ -1\right)+\left(7,\ \ 6\right)=\left(10,\ \ 5\right)$

$\overrightarrow{q}=2\left(3,\ \ -1\right)+2\left(-1,\ \ 2\right)=\left(6,\ \ -2\right)+\left(-2,\ \ 4\right)=\left(4,\ \ 2\right)$ よって $\overrightarrow{q}=\frac{5}{2}\overrightarrow{p}$ より $\overrightarrow{p}\,/\!/\,\overrightarrow{q}$

⑶ $\overrightarrow{p}=6\left(3,\ \ -1\right)+8\left(-1,\ \ 2\right)=\left(18,\ \ -6\right)+\left(-8,\ \ 16\right)=\left(10,\ \ 10\right)$

$\overrightarrow{q}=-\left(3,\ \ -1\right)-\left(-1,\ \ 2\right)+\left(7,\ \ 6\right)=\left(-3+1+7,\ \ 1-2+6\right)=\left(5,\ \ 5\right)$

よって $\overrightarrow{p}=2\overrightarrow{q}$ より $\overrightarrow{p}\,/\!/\,\overrightarrow{q}$

P.17 練習 10

$\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=\left(6,\ \ 4\right)+\left(-2t,\ \ t\right)=\left(6-2t,\ \ 4+t\right)$ を $k\left(-1,\ \ 4\right)$ とおくと

$\begin{cases}6-2t=-k\\4+t=4k\end{cases}$ より $\begin{cases}6-2t=-k\\8+2t=8k\end{cases}$

よって $14=7k$ となり $k=2,\ \ t=4$

P.18 練習 11

⑴ $\left(4,\ \ -1\right)=m\left(2,\ \ 1\right)+n\left(1,\ \ -1\right)$ とおくと $\begin{cases}2m+n=4\\m-n=-1\end{cases}$

よって $\begin{cases}m=1\\n=2\end{cases}$ 従って $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$

⑵ $\left(0,\ \ 9\right)=m\left(2,\ \ 1\right)+n\left(1,\ \ -1\right)$ とおくと $\begin{cases}2m+n=0\\m-n=9\end{cases}$

よって $\begin{cases}m=3\\n=-6\end{cases}$ 従って $\overrightarrow{d}=3\overrightarrow{a}-6\overrightarrow{b}$

P.19 練習 12

⑴ $\begin{cases} x+2=4 \\ 3=y-1 \end{cases}$ より　$x=2,\quad y=4$

⑵ $\begin{cases} x+3y=0 \\ -\left(2x-6\right)=0 \end{cases}$ より　$x=3,\quad y=-1$

P.19 練習 13

⑴ $\left(x+y\right)\vec{a}+\vec{b}=3\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)+x\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)$

$=3\vec{a}+6\vec{b}+3x\vec{a}-x\vec{b}$

$=\left(3+3x\right)\vec{a}+\left(6-x\right)\vec{b}$

よって　$\begin{cases} x+y=3+3x \\ y=6-x \end{cases}$　従って　$x=5,\quad y=13$

⑵ $x\vec{a}+\vec{b}+\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)+y\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)=x\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}+2\vec{b}+3y\vec{a}-y\vec{b}$

$=\left(x+1+3y\right)\vec{a}+\left(3-y\right)\vec{b}=\vec{0}$

よって　$\begin{cases} x+1+3y=0 \\ 3-y=0 \end{cases}$　従って　$x=-10,\quad y=3$

P.20 練習 14

⑴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot3\cos\dfrac{\pi}{4}=12\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=6\sqrt{2}$

⑵ $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{3}\cos\dfrac{5}{6}\pi=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=-3$

P.21 練習 15

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2\cdot2\cos\dfrac{\pi}{3}=4\cdot\dfrac{1}{2}=2$

⑵ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2\cdot2\cos\dfrac{2}{3}\pi=4\cdot\dfrac{-1}{2}=-2$

⑶ $\overrightarrow{\mathrm{BM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=1\cdot2\cos0=2$

⑷ $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\sqrt{3}\cdot2\cos\dfrac{\pi}{6}=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$

P.21 練習 16

⑴ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=2\cdot 2\cos\frac{2}{3}\pi=4\cdot\frac{-1}{2}=-2$

⑵ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=2\cdot 2\cos 0=4$

⑶ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}=2\cdot 4\cos\pi=-8$

⑷ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=2\cdot 2\sqrt{3}\cos\frac{5}{6}\pi=4\sqrt{3}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}=-6$

⑸ $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{DB}=2\cdot 2\sqrt{3}\cos\frac{5}{6}\pi=4\sqrt{3}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}=-6$

⑹ $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FC}=4\cdot 4\cos\frac{\pi}{3}=8$

P.22 練習 17

⑴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 8+5\cdot 2=26$

⑵ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\cdot 3+3\cdot 2=0$

P.23 練習 18

⑴ $\cos\theta=\frac{-3\sqrt{3}}{3\cdot 2}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$　$0\leqq\theta\leqq\pi$　より　$\theta=\frac{5}{6}\pi$（$=150°$）

⑵ $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$　$0\leqq\theta\leqq\pi$　より　$\theta=\frac{1}{4}\pi$（$=45°$）

P.23 練習 19

⑴ $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{10}$，$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\left(-1\right)^2+2^2}=\sqrt{5}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times\left(-1\right)+\left(-1\right)\cdot 2=-5$　より

$\cos\theta=\frac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$　である。$0\leqq\theta\leqq\pi$　より　$\theta=\frac{3}{4}\pi$（$=135°$）

⑵ $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3^2+\left(-6\right)^2}=3\sqrt{5}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times 3+1\times\left(-6\right)=0$　より

$\cos\theta=0$　である。$0\leqq\theta\leqq\pi$　より　$\theta=\frac{\pi}{2}$（$=90°$）

⑶ $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{2}$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times\left(1-\sqrt{3}\right)+1\times\left(1+\sqrt{3}\right)=2$　より　$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$　である。

$0\leqq\theta\leqq\pi$　より　$\theta=\frac{\pi}{3}$（$=60°$）

P.23 練習 19

⑷ $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}$ , $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(-3)^2+\sqrt{3}^2}$ , $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\times(-3)+1\times\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$ より

$\cos\theta=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\cdot2\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$ である。$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$（$=120°$）

⑸ $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$ , $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$ , $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\cdot(-2)+1\cdot4=10$ より

$\cos\theta=\dfrac{10}{\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}}=1$ である。$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\theta=0$

⑹ $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ , $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(-6)^2+3^2}=3\sqrt{5}$ , $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-6)+(-1)\cdot3=-15$ より

$\cos\theta=\dfrac{-15}{\sqrt{5}\cdot3\sqrt{5}}=-1$ である。$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\theta=\pi$（$=180°$）

P.24 練習 20

⑴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=4x+1\cdot3=4x+3=0$ とおくと $x=-\dfrac{3}{4}$

⑵ $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2$

$=\sqrt{4^2+1^2}-\sqrt{x^2+3^2}=0$ とおくと $x^2+3^2=17$ より $x=\pm2\sqrt{2}$

P.24 練習 21

求めるベクトルを $\vec{p}=(x,\ y)$ とおくと，$\vec{p}\perp\vec{a}$ より

$\vec{p}\cdot\vec{a}=x\cdot(-1)+y\cdot2=-x+2y=0$ である。

よって $x=2y$ 従ってたとえば $\vec{p}=(2,\ 1)$ は $\vec{a}$ に垂直なベクトルである。

このとき $\left|\vec{p}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ であるから，$\vec{a}$ に垂直な単位ベクトルは $\dfrac{\pm1}{\sqrt{5}}(2,\ 1)$

つまり $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ または $\left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right)$

P.25 練習 22

⑴ $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\vec{b}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2$

⑵ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

$=\left(\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}\right)+\left(\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}\right)$

$=2\left(\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}\right)=2\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right)$

P.26 練習 23

⑴ $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$

$=4\left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$

$=8+8+5=21$

よって　与式$=\sqrt{21}$

⑵ $\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=2\left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot\vec{a}-6\left|\vec{b}\right|^2$

$=4+2-30=-24$

P.26 練習 24

⑴ $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$

$=\left|\vec{a}\right|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2$

$=9-4\vec{a}\cdot\vec{b}+16=37$

よって　$4\vec{a}\cdot\vec{b}=-12$

従って　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$

⑵ $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-3}{3\cdot2}=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

P.27 演習 1

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(3,\ \ 1\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(2,\ \ 4\right)$ より

$S=\dfrac{1}{2}\left|3\cdot4-1\cdot2\right|=5$

⑵ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(-1,\ \ -1\right)+\left(4,\ \ -1\right)=\left(3,\ \ -2\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(-1,\ \ -1\right)+\left(-1,\ \ -3\right)=\left(-2,\ \ -4\right)$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\left|3\cdot\left(-4\right)-\left(-2\right)\cdot\left(-2\right)\right|=8$

P.30 練習 25

$$\vec{p}=\frac{1\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$$

$\vec{a}=(5,\ \ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ \ 4)$ のとき $\vec{p}=\dfrac{1}{3}\{(5,\ \ 2)+(-2,\ \ 8)\}=\dfrac{1}{3}(3,\ \ 10)=\left(1,\ \ \dfrac{10}{3}\right)$

$\vec{q}=-2\vec{a}+3\vec{b}$　$\vec{a}=(5,\ \ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ \ 4)$ のとき $\vec{q}=(-10,\ \ -4)+,(-3\ \ 12)=(-13,\ \ 8)$

よって P は$\left(1,\ \ \dfrac{10}{3}\right)$，Q は$(-13,\ \ 8)$

P.30 練習 26

P，Q，R の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ とかくと

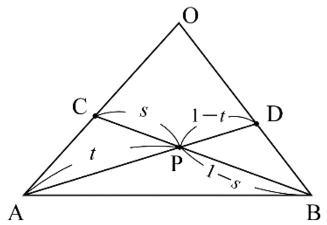
$\vec{p}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$，$\vec{q}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$，$\vec{r}=\dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$ なので

$\vec{g}=\dfrac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{2}\right)=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$　よって $\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\vec{a}=(3,\ \ 7)$，$\vec{b}=(-2,\ \ 3)$，$\vec{c}=(5,\ \ -1)$ のとき $\vec{g}=\dfrac{(3-2+5,\ \ 7+3-1)}{3}=(2,\ \ 3)$

よって　G は（ 2，3 ）

P.31 練習 27




P が AD を $t:(1-t)$ に内分するとすれば

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t)\vec{a}+t\cdot\frac{2}{3}\vec{b}\quad\cdots①$$

一方，P が CB を $s:(1-s)$ に内分するとすれば

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-s)\cdot\frac{3}{5}\vec{a}+s\vec{b}\quad\cdots②$$

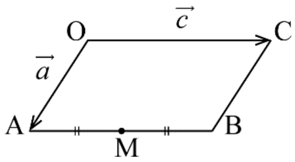
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立であるから①，②より　$1-t=(1-s)\cdot\dfrac{3}{5}$ かつ $\dfrac{2}{3}t=s$

よって　$1-t=\left(1-\dfrac{2}{3}t\right)\cdot\dfrac{3}{5}$　つまり　$5-5t=3-2t$　$2=3t$　$t=\dfrac{2}{3}$

①に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}$

P.32 練習 28

点 O を基準とする点 A，C の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。
このとき




$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{2\times\overrightarrow{\mathrm{OA}}+1\times\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{1+2}=\frac{1}{3}\left(2\vec{a}+\vec{c}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{2}\left(2\vec{a}+\vec{c}\right)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$　ゆえに，3 点 O，L，M は同一直線上にある。

また　OL : OM = 2 : 3

P.34 練習 29

直線上の任意点を $\mathrm{P}\left(x,\ y\right)$ とすると $\left(x,\ y\right)=\left(-2,\ 5\right)+t\left(4,\ 3\right)$ と表せるので

媒介変数表示は $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=5+3t \end{cases}$　よって　$\dfrac{x+2}{4}=t,\ \dfrac{y-5}{3}=t$　となるので

直線の方程式は $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-5}{3}$

（さらに変形して $3x+6=4y-20$ より $3x-4y+26=20$ としてよい）

P.34 練習 30

直線上の任意点を $\mathrm{P}\left(x,\ y\right)$ とすると $\left(x,\ y\right)=\left(4,\ 1\right)+t\left(2,\ -3\right)$ と表せるので

媒介変数表示は $\begin{cases} x=4+2t \\ y=1-3t \end{cases}$　よって　$\dfrac{x-4}{2}=t,\ \dfrac{y-1}{-3}=t$　となるので

直線の方程式は $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-1}{-3}$

（さらに変形して $-3x+12=2y-2$ より $3x+2y-14=0$ としてよい）

P.34 練習 31

方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(2,\ -6\right)+\left(7,\ 5\right)=\left(9,\ -1\right)$ であるから

直線上の任意点を $\mathrm{P}\left(x,\ y\right)$ とすると $\left(x,\ y\right)=\left(-2,\ 6\right)+t\left(9,\ -1\right)$ と表せる。

よって媒介変数表示は $\begin{cases} x=-2+9t \\ y=6-t \end{cases}$　従って　$\dfrac{x+2}{9}=t,\ \dfrac{y-6}{-1}=t$　となるので

直線の方程式は $\dfrac{x+2}{9}=\dfrac{y-6}{-1}$

（変形して $-x-2=9y-54$ つまり $x+9y-52=0$ としてよい）

P.34 練習 32

$2(x-3)+(-1)(y-1)=0$ より $2x-6-y+1=0$ つまり $2x-y-5=0$

P.34 練習 33

2 直線 $\lambda$ ： $ax+by+c=0$

$\lambda'$ ： $a'x+b'y+c'=0$

の法線ベクトルの 1 つは，それぞれ $\vec{n}=(a,\ b)$， $\vec{n'}=(a',\ b')$ とかける。

$\vec{n}\neq\vec{0}$， $\vec{n'}\neq\vec{0}$ だから $\lambda\perp\lambda' \Leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{n'}$

$\Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{n'}=0$

$\Leftrightarrow aa'+bb'=0$

P.35 練習 34

直線 $3x+4y+5=0$ を $\lambda$，求める直線 $a'x+b'y+c'=0$ を $\lambda'$ とおくと前問より $3a'+4b'=0$

よって $\lambda'$ の法線ベクトルの一つは $\vec{n}=(4,\ -3)$ であり $(3,\ 2)$ を通るので $4(x-3)-3(y-2)=0$

つまり $4x-3y-6=0$

P.36 練習 35

$\overrightarrow{P_1P}\perp\overrightarrow{CP_1}$ または $\overrightarrow{P_1P}=\vec{0}$ より $\overrightarrow{P_1P}\cdot\overrightarrow{CP_1}=0$

これより $\left(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CP_1}\right)\cdot\overrightarrow{CP_1}=\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CP_1}-\left|\overrightarrow{CP_1}\right|^2=0$

ここで $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CP_1}=\left(\vec{p}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{p_1}-\vec{c}\right)$

また， $\left|\overrightarrow{CP_1}\right|=r$ であるから $\left(\vec{p}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{p_1}-\vec{c}\right)=r^2$

P.37 節末問題

P.37 1.

⑴ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}$

$=\vec{a}+\vec{b}$

⑵ $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BF}$

$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$

$=-\vec{a}+\vec{b}$

⑶ $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CD}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{b}\right)$

$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

⑷ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{BC}+\vec{b}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{3\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{b}\right\}$

$=\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$

P.37 節末問題つづき

P.37　2.

⑴ $2\vec{a}+3\vec{b}=(-2,\ \ 4)+(3,\ \ 3x)=(1,\ \ 4+3x)$

$\vec{a}-2\vec{b}=(-1,\ \ 2)+(-2,\ \ -2x)=(-3,\ \ 2-2x)$

⑵ $2\vec{a}+3\vec{b}=k(\vec{a}-2\vec{b})$ となる任意の実数 $k$ が存在するとき

⑴より $(1,\ \ 4+3x)=k(-3,\ \ 2-2x)$ であるから $\begin{cases}1=-3k\\ 4+3x=4(2-2x)\end{cases}$

よって $k=\frac{1}{3}$ となり $x=-2$

P.37　3.

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}$

$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}$

$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}=-\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}$

$\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{d}$

⑵ $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}\right)$

$=\frac{1}{2}\left|\vec{b}\right|^2+\vec{b}\cdot\vec{d}+\frac{1}{4}\vec{d}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\left|\vec{d}\right|^2$

$=\frac{1}{2}\cdot 2^2+0+0+\frac{1}{2}\cdot 1^2$

$=\frac{5}{2}$

⑶ $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{d}\right)$

$=-\frac{1}{2}\left|\vec{b}\right|^2+\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{d}\cdot\vec{b}-\frac{1}{4}\left|\vec{d}\right|^2$

$=-\frac{1}{2}\cdot 2^2+0+0-\frac{1}{4}\cdot 1^2$

$=-\frac{9}{4}$

P.37　4.

⑴ $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$

$=\left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2$

よって　$19=13+4\vec{a}\cdot\vec{b}$

従って　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{2}$

⑵ $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{\frac{3}{2}}{3\cdot 1}=\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\theta=60^\circ=\frac{\pi}{3}$

P.37 節末問題

P.37　5.

点 C を基準とする点 A，B の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}$，　$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$ とする。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{1\times\overrightarrow{\mathrm{CA}}+2\times\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{2+1}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}}{2}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$$ したがって，　$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

よって，　3 点 P，　R，　C は同一直線上にある。

P.38　6.

⑴
$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|&=\left|\left(3,\ -2\right)+t\left(2,\ 1\right)\right|\\&=\left|\left(3+2t\right),\ -2+t\right|\\&=\sqrt{\left(3+2t\right)^2+\left(-2+t\right)^2}\\&=\sqrt{5t^2+8t+13}\end{aligned}$$

⑵
$$\begin{aligned}5t^2+8t+13&=5\left(t^2+\frac{8}{5}t\right)+13\\&=5\left\{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2-\frac{16}{25}\right\}+13\\&=5\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{49}{5}\end{aligned}$$

は　$t=-\frac{4}{5}$　のとき最小値　$\frac{49}{5}$　をとる。

よって　最小値 $\frac{7}{\sqrt{5}}$　　$t=-\frac{4}{5}$

⑶　$\vec{b}\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+1^2}^{\,2}=5$　を用いて

$$\left(\vec{a}-\frac{4}{5}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{4}{5}\vec{b}\cdot\vec{b}=4-\frac{4}{5}\cdot5=0$$

よって，　内積が 0 であるから　$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{b}$ は垂直である。

P.37 節末問題つづき

P.38　7.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$　とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\vec{b}+\vec{c}$　より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1+t)\left|\vec{b}\right|^2+(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{c}\cdot\vec{b}+t\left|\vec{c}\right|^2$$

$$=(-1+t)\cdot4^2+(1-2t)\vec{b}\cdot\vec{c}+t\cdot5^2$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$　であることと　$\vec{b}\cdot\vec{c}=4\cdot5\cos60^\circ=10$　を用いて

$$0=16(-1+t)+(1-2t)\cdot10+25t$$

$$=-16+16t+10-20t+25t$$

$$=21t-6$$

よって　$t=\dfrac{2}{7}$

P.38　8.

⑴　P が MB を　$t:(1-t)$　に内分するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\dfrac{1}{3}\vec{a}+t\vec{b}$

P が AN を　$s:(1-s)$　に内分するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\vec{a}+s\cdot\dfrac{3}{7}\vec{b}$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立なので次の式が成り立つ。

$$\begin{cases}(1-t)\cdot\dfrac{1}{3}=1-s\\ t=s\cdot\dfrac{3}{7}\end{cases}\quad よって\quad\begin{cases}s=\dfrac{7}{9}\\ t=\dfrac{1}{3}\end{cases}\quad 従って\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

⑵　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　おく。またQが AB を　$u:(1-u)$ に内分するとする。

このとき $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$　ある。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(1-u)\vec{a}+ku\vec{b}$　表せる。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立なので⑴より $\begin{cases}k(1-u)=\dfrac{2}{9}\\ ku=\dfrac{1}{3}\end{cases}$　が成り立つ

従って $k=\dfrac{5}{9}$ となり $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　すなわち　$\mathrm{OP}:\mathrm{PQ}=5:4$

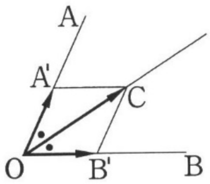
P.37 節末問題つづき

P.38　9.

⑴ $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$は，それぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$と同じ向きの単位ベクトルである。そこで

$$\overrightarrow{OA'}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},\quad \overrightarrow{OB'}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|},\quad \overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OC}$$

とすると，図のように，OA′，OB′を 2 辺とするひし形の対角線が OC となる。対角線 OC は，∠AOB の 2 等分線であるから，$\vec{p}$ は ∠AOB の 2 等分線のベクトル方程式である。




⑵ $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$とすると，$\overrightarrow{OD}$は∠AOB の二等分線であるから

$$\vec{d}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=\frac{t}{|\vec{a}|}\vec{a}+\frac{t}{|\vec{b}|}\vec{b}\quad \cdots①$$

また，点 D が線分 AB を$s:(1-s)$ に内分するなら，$\vec{d}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$　…②

$\vec{a}$，$\vec{b}$は 1 次独立であるから　$\dfrac{t}{|\vec{a}|}=1-s$　…③，　$\dfrac{t}{|\vec{b}|}=s$　…④

④÷③より　$\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\dfrac{s}{1-s}$

従って　$|\vec{a}|:|\vec{b}|=s:(1-s)$

よって　OA：OB＝AD：DB　（②より）

P.37 節末問題つづき

P.38　10.

⑴　G は△ ABC の重心であるから，　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

ここで，　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}}$

よって，　3 点 O，　G，　H は同一直線上にある。

⑵　O は△ ABC の外心であるから，

$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$ より

$$\left(\vec{h}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\left\{\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)-\vec{a}\right\}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$$
$$=\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{c}\right|^2=0$$

⑶　⑵より　$\left(\vec{h}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0$ なので，　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\neq\vec{0}$,　$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\neq\vec{0}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

すなわち　AH ⊥ CB

同様にして，

$\left(\vec{h}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{a}\right)=0$ より BH ⊥ CA

$\left(\vec{h}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$ より CH ⊥ AB

よって，　点 H は△ ABC の垂心である。