

# 1 章 微分法 I

## 1 章の問題

1

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} (1+3h)^{\frac{1}{h}} \text{ において, } 3h=t \text{ とおくと}$$

$$h = \frac{t}{3} \text{ で, } h \rightarrow 0 \text{ のとき } t \rightarrow 0 \text{ である。}$$

$$\text{与式} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{3}{t}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^3 = e^3$$

$$(2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} (1-2h)^{\frac{1}{h}} \text{ において, } -2h=t \text{ とおくと}$$

$$h = -\frac{t}{2} \text{ で, } h \rightarrow 0 \text{ のとき } t \rightarrow 0 \text{ である。}$$

$$\text{与式} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{2}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \{ \log(x+2) - \log x \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left( 1 + \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^x$$

$$\frac{2}{x} = t \text{ とおくと, } x = \frac{2}{t} \text{ で}$$

$$x \rightarrow \infty \text{ のとき } t \rightarrow 0 \text{ である。}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \lim_{t \rightarrow 0} \log (1+t)^{\frac{2}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \log \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^2 \\ &= \log e^2 = 2 \end{aligned}$$

$$(4) \quad e^x - 1 = h \text{ とおくと, } e^x = 1+h \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$x \rightarrow 0 \text{ のとき } e^x \rightarrow 1 \text{ だから } h \rightarrow 0$$

$$\textcircled{1} \text{ の両辺の自然対数をとると}$$

$$x = \log(1+h)$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\log(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{h} \log(1+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\log(1+h)^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{\log e} = 1 \end{aligned}$$

2

$$(1) \quad b \leq 0 \text{ のとき与式は } \infty \text{ に発散するから } b > 0$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+ax} - bx - 1)(\sqrt{x^2+ax} + bx + 1)}{\sqrt{x^2+ax} + bx + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax - (b^2x^2 + 2bx + 1)}{\sqrt{x^2+ax} + bx + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-b^2)x^2 + (a-2b)x - 1}{\sqrt{x^2+ax} + bx + c} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-b^2)x + (a-2b) - \frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}} + b + \frac{c}{x^2}} \end{aligned}$$

$$\text{これが収束するためには } 1-b^2=0$$

$$b > 0 \text{ だから } b=1, \text{ このとき}$$

$$\text{与式} = \frac{a-2b}{1+b} = \frac{a-2}{2} = 3$$

$$\therefore a=8, \quad b=1$$

2

$$(2) \text{ 分母について } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad \text{だから}$$

$$\text{等式が成り立つには, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (ax - b) = \frac{\pi}{6}a - b = 0$$

$$\therefore b = \frac{\pi}{6}a \text{ を代入すると}$$

$$\text{与式} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{ax - \frac{\pi}{6}a}{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{a\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \theta \text{ とおくと } x \rightarrow \frac{\pi}{6} \text{ のとき } \theta \rightarrow 0$$

$$\therefore \text{与式} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{a\theta}{\sin 2\theta} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{2} \text{ より } a = 1, \quad b = \frac{\pi}{6}$$

3  $x = -1$  で連続であるためには

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \text{ が成り立てばよい。}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2 - x + 1)}{\cancel{x+1}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\therefore f(-1) = a = 3$$

4

$$(1) \quad y = x\sqrt{1+e^x}$$

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{1+e^x} + x \cdot \frac{1}{2}(1+e^x)^{-\frac{1}{2}} e^x \\ &= \frac{2(1+e^x) + xe^x}{2\sqrt{1+e^x}} = \frac{(x+2)e^x + 2}{2\sqrt{1+e^x}} \end{aligned}$$

$$(3) \quad y = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$(2) \quad y = \log(\log x)$$

$$y' = \frac{(\log x)'}{\log x} = \frac{1}{x \log x}$$

$$(4) \quad y = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} y' &= 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left( \cos \frac{1}{x} \right) \left( -\frac{1}{x^2} \right) \\ &= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

4

(5)  $y = 2^{\sin x}$  の両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log 2^{\sin x} = (\log 2) \sin x$$

両辺を  $x$  で微分して

$$\frac{y'}{y} = (\log 2) \cos x$$

$$y' = (\log 2) 2^{\sin x} \cos x$$

$$(6) \quad y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{-\sin x \cdot \sqrt{x} - \cos x \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{x}$$

$$= -\frac{2x \sin x + \cos x}{2x\sqrt{x}}$$

5  $f(x) = ax^2$ ,  $y(x) = \log x$  とおく。①, ②の接点を  $x = t$  とすると

$$f'(t) = g'(t), \quad g'(t) = y(t) \text{ が成り立つ。}$$

$$f'(x) = 2ax, \quad g'(x) = \frac{1}{x} \text{ だから}$$

$$f(t) = g'(t) \text{ より } 2at = \frac{1}{x} \dots\dots\dots ③$$

$$f(t) = g'(t) \text{ より } at^2 = \log t \dots\dots\dots ④$$

③より  $at^2 = \frac{1}{2}$ , ④に代入して

$$\log t = \frac{1}{2} \text{ より } t = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\text{よって, } a = \frac{1}{2e}, \text{ 接点は } \left( \sqrt{e}, \frac{1}{2} \right),$$

接線の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}} (x - \sqrt{e})$$

$$\text{よって, } y = \frac{1}{\sqrt{e}} x - \frac{1}{2}$$

6

$$(1) \quad f(x) = x \sin x + \cos x + 1$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x$$

$$= x \cos x$$

$$f'(x) = 1 \text{ とすると } x = \frac{\pi}{2}$$

増減表は次のようになる。

$x$	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\pi$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	2	↗	$\frac{\pi}{2} + 1$	↘	0

$$\text{よって, } x = \frac{\pi}{2} \text{ のとき最大値 } \frac{\pi}{2} + 1$$

$$x = \pi \text{ のとき最小値 } 0$$

6

$$\begin{aligned}
 (2) \quad f(x) &= \frac{\sin x}{2 - \sqrt{3} \cos x} \\
 f'(x) &= \frac{\cos x (2 - \sqrt{3} \cos x) - \sin x (\sqrt{3} \sin x)}{(2 - \sqrt{3} \cos x)^2} \\
 &= \frac{2 \cos x + \sqrt{3} (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(2 - \sqrt{3} \cos x)^2} \\
 &= \frac{2 \cos x - \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3} \cos x)^2}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \frac{\pi}{6}$$

増減表は次のようになる。

$x$	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\pi$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

よって,  $x = \frac{\pi}{6}$  のとき最大値 1

$x = 0, \pi$  のとき最小値 0

7

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(x) &= \frac{\log(x+1)}{x} \\
 f'(x) &= \frac{\frac{1}{x+1} \cdot x - \log(x+1)}{x^2} \\
 &= \frac{x - (x+1) \log(x+1)}{x^2 (x+1)}
 \end{aligned}$$

ここで,  $0 < x < \pi$  だから  $x^2 (x+1) > 0$

分子を  $g(x) = x - (x+1) \log(x+1)$  とおくと

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 1 - \log(x+1) - (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} \\
 &= -\log(x+1) < 0
 \end{aligned}$$

ゆえに,  $0 < x < \pi$  で  $f(x) < 0$  だから

$f(x)$  は減少関数である。

(2)  $0 < a < b$  のとき  $f(a) > f(b)$  が成り立つ。

$$\frac{\log(b+1)}{b} < \frac{\log(a+1)}{a}$$

$$a \log(b+1) < b \log(a+1)$$

$$\log(b+1)^a < \log(a+1)^b$$

底は  $e$  で  $e > 1$

よって,  $(b+1)^a < (a+1)^b$  が成り立つ。

8

$$(1) \quad y' = ae^{ax} \sin bx + e^{ax} \cdot b \cos bx = e^{ax} (a \sin bx + b \cos bx)$$

$$y'' = ae^{ax} (a \sin bx + b \cos bx) + e^{ax} (ab \cos bx - b^2 \sin bx) \\ = e^{ax} \{ (a^2 - b^2) \sin bx + 2ab \cos bx \}$$

$$(2) \quad y' = ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx = ay + be^{ax} \cos bx \quad \therefore e^{ax} \cos bx = \frac{y' - ay}{b}$$

$$y'' = (a^2 - b^2) e^{ax} \sin bx + 2abe^{ax} \cos bx = (a^2 - b^2) y + 2ab \cdot \frac{y' - ay}{b} \\ = 2ay' - (a^2 + b^2) y$$

9

$$(1) \quad f(x) = (\log x - 1) \log x \quad \text{まず, 真数条件より } x > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log x + (\log x - 1) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \log x - 1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - (2 \log x - 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{3 - 2 \log x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{は} \quad 2 \log x - 1 = 0 \quad \text{より} \quad \log x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \sqrt{e}$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{は} \quad 3 - 2 \log x = 0 \quad \text{より} \quad \log x = \frac{3}{2} \quad \therefore x = e^{\frac{3}{2}}$$

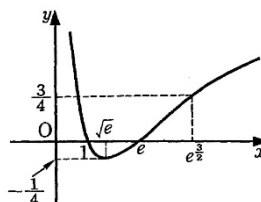
$f(x)$  の増減表は次のようになる。

$x$	0	...	$\sqrt{e}$	...	$e^{\frac{3}{2}}$	...
$f'(x)$		-	0	+	+	+
$f''(x)$		+	+	+	0	-
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$

$$\text{極小値 } f(\sqrt{e}) = -\frac{1}{4}$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{4} \quad \text{より} \quad \text{変曲点} \left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{4}\right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$$

これより, グラフは右図のようになる。



$$(2) \quad f(x) = e^{2x} - 2e^x$$

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$$

$$f''(x) = 4e^{2x} - 2e^x = 2e^x(2e^x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ は } e^x - 1 = 0 \text{ より } x = 0$$

$$f''(x) = 0 \text{ は } 2e^x - 1 = 0 \text{ より } e^x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = -\log 2$$

$f(x)$  の増減表は次のようになる。

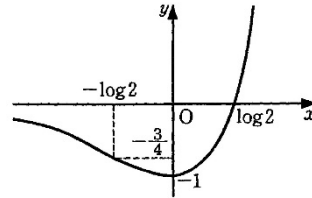
$x$	...	$-\log 2$	...	0	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$		変曲点		極小	

$$\text{極小値 } f(0) = -1$$

$$f(-\log 2) = -\frac{3}{4} \text{ より, 変曲点 } \left(-\log 2, -\frac{3}{4}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

これより, グラフは右図のようになる。



$$(1) \quad f(x) = (x + c)e^{-x^2}$$

$$f'(x) = e^{-x^2} + (x + c)(-2x)e^{-x^2} = (1 - 2cx - 2x^2)e^{-x^2}$$

$x = 1$  で極値をとるので

$$f'(1) = (1 - 2c - 2)e^{-1} = 0 \quad \therefore c = -\frac{1}{2}$$

$$(2) \quad c = -\frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$$

$$f'(x) = (1 + x - 2x^2)e^{-x^2} = -(2x + 1)(x - 1)e^{-x^2}$$

$f(x)$  の増減表は次のようになる。

$x$	...	$-\frac{1}{2}$	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		極小		極大	

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = 0$$

$$\text{極小値 } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -e^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$$

$$\text{極大値 } f(1) = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e}$$

$$x < -\frac{1}{2}, \quad 1 < x \text{ で減少}$$

$$-\frac{1}{2} < x < 1 \text{ で増加}$$

$$(3) \quad -\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \leq k \leq \frac{1}{2e}$$

(1) [証明]

 $x > 0$  より

$$f(x) = (x+1) \log \frac{x+1}{x} = (x+1) \log(x+1) - (x+1) \log x$$

$$f'(x) = \log(x+1) + \frac{x+1}{x+1} - \log x - \frac{x+1}{x} = \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x} = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$$

よって、 $f'(x)$  は増加関数であり

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right\} = 0$$

ゆえに  $x > 0$  において  $f'(x) < 0$  だから  $f(x)$  は単調減少関数である。(証明終)(2)  $f(x) = (x+1) \log \frac{x+1}{x} = (x+1) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  だから

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (x+1) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \infty,$$

 $t = \frac{1}{x}$  とおくと  $x \rightarrow \infty$  のとき  $t \rightarrow +0$  だから

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{t \rightarrow +0} \left( \frac{1}{t} + 1 \right) \log(1+t) = \log(1+t)^{\frac{1}{t}+1} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \left\{ \log(1+t)^{\frac{1}{t}} + \log(1+t) \right\} = \log e + \log 1 = 1 \end{aligned}$$

(3) [証明]

 $f(x)$  は減少関数であり、 $x > 0$  で連続である。

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \left(\frac{1}{e^2} + 1\right) \log(1 + e^2) > \log e^2 = 2$$

$$f(1) = 2 \log 2 < 2 \cdot \log e = 2$$

よって、中間値の定理より  $f(x) = 2$  を満たす  $x$  が $\frac{1}{e^2} < x < 1$  の範囲にただ 1 つ存在する。(証明終)

AP 間の距離は  $AP = \sqrt{x^2 + 9}$

PC 間の距離は  $PC = 6 - x$

A から C まで到着するのにかかる時間を  $f(x)$  とすると

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{2} + \frac{6 - x}{4}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (x^2 + 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - \frac{1}{4} \\ &= \frac{2x - \sqrt{x^2 + 9}}{4\sqrt{x^2 + 9}} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$  とすると

$$2x = \sqrt{x^2 + 9} \quad (x > 0)$$

$$4x^2 = x^2 + 9, \quad x^2 = 3 \quad \therefore \quad x = \sqrt{3}$$

よって、B から  $\sqrt{3}$  km 離れた地点にボートを着けるのが一番早い。