

1 章 微分法 I

3 節 導関数の応用

A 問題

59

(1) $f(x) = x^3 - 2x$ とすると
 $f'(x) = 3x^2 - 2$ $f'(1) = 1$
よって、接線の方程式は
 $y + 1 = x - 1$ より $y = x - 2$

(3) $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ とすると
 $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$ $f'(2) = 0$
よって、接線の方程式は
 $y - 3 = 0$ より $y = 3$

(5) $f(x) = \sin x$ とすると
 $f'(x) = \cos x$ $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
よって、接線の方程式は
 $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ より
 $y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

(7) $f(x) = e \log x$ とすると
 $f'(x) = \frac{e}{x}$ $f'(e) = 1$
よって、接線の方程式は
 $y - e = x - e$ より $y = x$

(2) $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2$ とすると
 $f'(x) = -4x^3 + 6x$ $f'(-1) = -2$
よって、接線の方程式は
 $y - 4 = -2(x + 1)$ より $y = -2x + 2$

(4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ とすると
 $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$ $f'(2) = 2$
よって、接線の方程式は
 $y - 1 = 2(x - 2)$ より $y = 2x - 3$

(6) $f(x) = \tan \frac{x}{2}$ とすると
 $f'(x) = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
よって、接線の方程式は
 $y - 1 = x - \frac{\pi}{2}$ より
 $y = x + 1 - \frac{\pi}{2}$

(8) $f(x) = e^{2x}$ とすると
 $f'(x) = 2e^{2x}$ $f'(1) = 2e^2$
よって、接線の方程式は
 $y - e^2 = 2e^2(x - 1)$ より $y = 2e^2x - e^2$

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4x^2 + 12$$

$$f'(x) = x^3 - 8x = x(x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2})$$

これより，増減表は次のようになる。

x	...	$-2\sqrt{2}$...	0	...	$2\sqrt{2}$...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	-4	\nearrow	12	\searrow	-4	\nearrow

よって

$x=0$ のとき 極大値 12

$x=\pm 2\sqrt{2}$ のとき 極小値 -4

$$(2) \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+3) - (x+1) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = -\frac{(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

これより，増減表は次のようになる。

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	$-\frac{1}{6}$	\nearrow	$\frac{1}{2}$	\searrow

よって

$x=1$ のとき 極大値 $\frac{1}{2}$

$x=-3$ のとき 極小値 $-\frac{1}{6}$

$$(3) \quad f(x) = -x + \frac{1}{x^3}$$

$$f'(x) = -1 - \frac{3}{x^4} = -\frac{x^4+3}{x^4} < 0$$

$\therefore f(x)$ は $x < 0$, $0 < x$ の範囲で減少し，極値はない。

$$(4) \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x-1} - x \cdot \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}}{x-1} = \frac{x-2}{2\sqrt{x-1}(x-1)}$$

これより、増減表は次のようになる。

x	1	...	2	...
$f'(x)$	/	-	0	+
$f(x)$	/	↘	2	↗

よって、 $x=2$ のとき極小値 2

$$(5) \quad f(x) = x^2 e^{-2x}$$

$$f'(x) = 2xe^{2x} + x^2 \cdot (-2e^{-2x}) = -2x(x-1)e^{-2x}$$

これより、増減表は次のようになる。

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{1}{e^2}$	↘

よって

$x=1$ のとき極大値 $\frac{1}{e^2}$

$x=0$ のとき極小値 0

$$(6) \quad f(x) = \frac{1 + \log x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1 + \log x) \cdot 1}{x^2} = -\frac{\log x}{x^2}$$

これより、増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...
$f'(x)$	/	+	0	-
$f(x)$	/	↗	1	↘

よって $x=1$ のとき極大値 1

$$(7) \quad f(x) = 3x - 2\cos x$$

$$f'(x) = 3 + 2\sin x > 0$$

よって、 $f(x)$ はつねに増加し、極値はない。

$$(8) \quad f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

定義域は $x^2 - 1 \geq 0$ より $x \leq -1$, $1 \leq x$ であり

$x \leq -1$ のとき $f'(x) \leq 0$ だから $f(x)$ は減少し

$x \geq 1$ のとき $f'(x) \geq 0$ だから $f(x)$ は増加する。また、極値はない。

61

$$(1) \quad f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$$

増減表は次のようになる。

x	-2	...	0	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	3	↘	-1	↗	3

よって、 $x = -2$, 1 のとき最大値 3

$x = 0$ のとき最小値 -1

$$(2) \quad f(x) = -2x^3 + 6x$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x + 1)(x - 1)$$

増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	4	↘	-4

よって、 $x = 1$ のとき最大値 4

$x = 2$ のとき最小値 -4

$$(3) \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 3$$

$$f'(x) = -x^3 + 4x = -x(x + 2)(x - 2)$$

x	-3	...	-2	...	0	...	2	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	↗	7	↘	3	↗	7	↘	$\frac{3}{4}$

よって、 $x = 2$, -2 のとき最大値 7

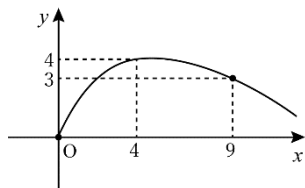
$x = 3$, -3 のとき最小値 $\frac{3}{4}$

$$(1) \quad f(x) = -x + 4\sqrt{x}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$$

増減表は次のようになる。

x	0	...	4	...	9
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	4	↘	3



よって、 $x=4$ のとき最大値 4

$x=0$ のとき最小値 0

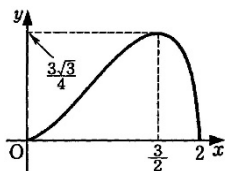
$$(2) \quad f(x) = x\sqrt{2x-x^2} \quad \text{の定義域は}$$

$$2x - x^2 \geq 0 \quad \text{より} \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{2x-x^2} + x \cdot \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} \\ &= -\frac{x(2x-3)}{\sqrt{2x-x^2}} \end{aligned}$$

増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{3}{2}$...	2
$f'(x)$	↗	+	0	-	↘
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0



よって $x = \frac{3}{2}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

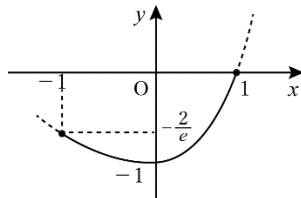
$x=0, 2$ のとき最小値 0

$$(3) \quad f(x) = (x-1)e^x$$

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

増減表は次のようになる。

x	-1	\cdots	0	\cdots	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2}{e}$	\searrow	-1	\nearrow	0



よって、 $x=1$ のとき最大値 0

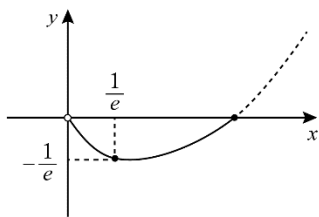
$x=0$ のとき最小値 -1

$$(4) \quad f(x) = x \log x$$

$$f'(x) = \log x + 1 \quad f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \frac{1}{e}$$

増減表は次のようになる。

x	0	\cdots	$\frac{1}{e}$	\cdots	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		\searrow	$-\frac{1}{e}$	\nearrow	0



よって、 $x=1$ のとき最大値 0

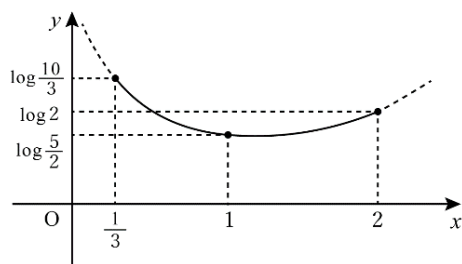
$x = \frac{1}{e}$ のとき最小値 $-\frac{1}{e}$

$$(5) \quad f(x) = \log(x^2 + 1) - \log x$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x^2 + 1)}$$

増減表は次のようになる。

x	$\frac{1}{3}$		1		2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\log \frac{10}{3}$	\searrow	$\log 2$	\nearrow	$\log \frac{5}{2}$



よって, $x = \frac{1}{3}$ のとき最大値 $\log \frac{10}{3}$

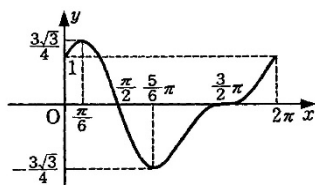
$x = 1$ のとき最小値 $\log 2$

$$(6) \quad f(x) = \cos x (1 + \sin x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x (1 + \sin x) + \cos^2 x \\ &= -\sin x - \sin^2 x + (1 - \sin^2 x) \\ &= -2\sin^2 x - \sin x + 1 = -(2\sin x - 1)(\sin x + 1) \\ f'(x) &= 0 \quad x = \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{5}{6}\pi$...	$\frac{3}{2}\pi$...	2π
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	0	+	+
$f(x)$	1	\nearrow	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	\searrow	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	\nearrow	0	\searrow	1



よって $x = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$x = \frac{5}{6}\pi$ のとき最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$$(1) \quad y = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad y' = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	0	...	1	...
y'	+	/	+	0	-	/	-
y	↗	/	↗	-1	↘	/	↘

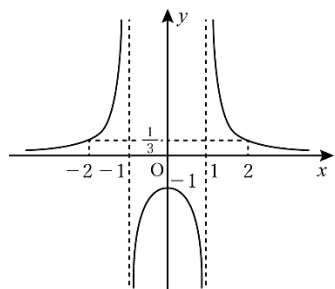
$x = 0$ のとき極大値 -1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x^2 - 1} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x^2 - 1} = \infty$$

より漸近線は直線 $x = 1$, $x = -1$, x 軸



$$(2) \quad y = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad y' = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2 + 1)^2}$$

増減表は次のようになる。

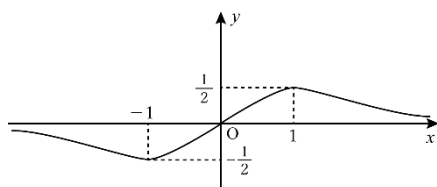
x	...	-1	...	1	...
y'	-	0	+	0	-
y	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

$x = 1$ のとき極大値 $\frac{1}{2}$

$x = -1$ のとき極小値 $-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

より漸近線は x 軸



$$(3) \quad y = \frac{x}{(x-1)^2}, \quad y' = \frac{1 \cdot (x-1)^2 - x \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

増減表は次のようになる。

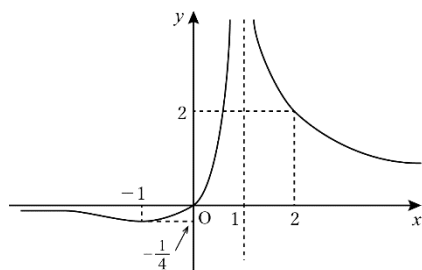
x	...	-1	...	1	...
y'	-	0	+	/	-
y	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	/	↘

$x = -1$ のとき極小値 $-\frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \infty$$

より漸近線は直線 $x = 1$, x 軸



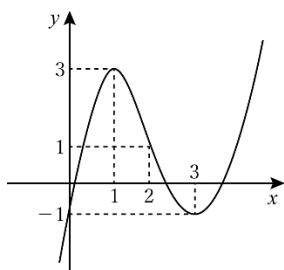
$$(1) \quad y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$y'' = 6x - 12 = 6(x-2)$$

増減表は次のようになる。

x	...	1	...	2	...	3	...
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y	↗	3	↘	1	↘	-1	↗



$x = 1$ のとき極大値 3

$x = 3$ のとき極小値 -1

変曲点(2, 1)

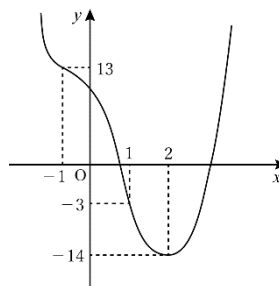
$$(2) \quad y = x^4 - 6x^2 - 8x + 10$$

$$y' = 4x^3 - 12x - 8 = 4(x+1)^2(x-2)$$

$$y'' = 12x^2 - 12 = 12(x+1)(x-1)$$

増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	1	...	2	...
y'	-	-	-	-	-	0	+
y''	+	0	-	0	+	+	+
y	↘	13	↘	-3	↘	-14	↗



$x = 2$ のとき極小値 -14

極大値はない。

変曲点(-1, 13), (1, -3)

$$(3) \quad y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x+1} = x + 2 + \frac{1}{x+1}$$

$$y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2}{(x+1)^3}$$

増減表は次のようになる。

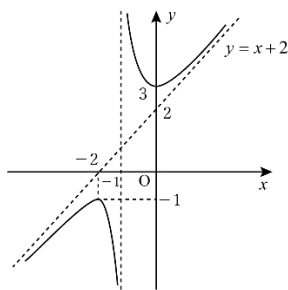
x	...	-2	...	-1	...	0	...
y'	+	0	-	/	-	0	+
y''	-	-	-	/	+	+	+
y	\nearrow	-1	\searrow	/	\searrow	3	\nearrow

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x - 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2 + 3x + 3}{x+1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2 + 3x + 3}{x+1} = -\infty$$



$x = -2$ のとき極大値 -1

$x = 0$ のとき極小値 3

変曲点はない。

漸近線は直線 $y = x + 2$ ，直線 $x = -1$

$$(4) \quad y = (x+1)e^x$$

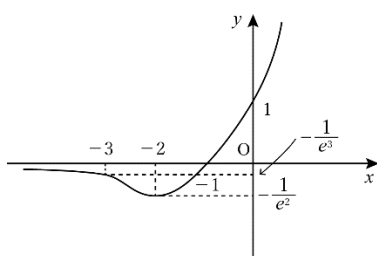
$$y' = e^x + (x+1)e^x = e^x(x+2)$$

$$y'' = e^x + e^x(x+2) = e^x(x+3)$$

増減表は次のようになる。

x	\cdots	-3	\cdots	-2	\cdots
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	\curvearrowright	$-\frac{2}{e^3}$	\curvearrowright	$-\frac{1}{e^2}$	\curvearrowleft

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)e^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^x = 0$$



$$x = -2 \text{ のとき極小値 } -\frac{1}{e^2}$$

$$\text{変曲点} \left(-3, -\frac{2}{e^3} \right), \text{ 漸近線は } x\text{軸}$$

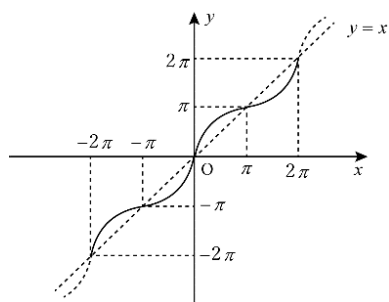
$$(5) \quad y = x + \sin x$$

$$y' = 1 + \cos x \geq 0, \quad y'' = -\sin x$$

$$y = 0 \text{ とすると } x = -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$$

増減表は次のようになる。

x	-2π	\cdots	$-\pi$	\cdots	0	\cdots	π	\cdots	2π
y'	0	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	
y''	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-2π	\curvearrowright	$-\pi$	\curvearrowleft	0	\curvearrowright	π	\curvearrowleft	2π



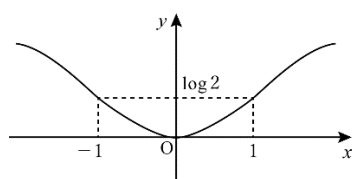
$$(6) \quad y = \log(x^2 + 1)$$

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad y'' = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2 + 1)^2}$$

増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	0	...	1	...
y'	-	-	-	0	+	+	+
y''	-	0	-	+	+	0	+
y	\searrow	$\log 2$	\searrow	0	\nearrow	$\log 2$	\nearrow

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x^2 + 1) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \log(x^2 + 1) = \infty$$



$y' = -\frac{2}{x^3}$ より, 点 $A\left(t, \frac{1}{t^2}\right)$ における接線の方程式は

$$y - \frac{1}{t^2} = -\frac{2}{t^3}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{2}{t^3}x + \frac{3}{t^2}$$

よって, P, Qの座標は $P\left(\frac{3}{2}t, 0\right)$, $Q\left(0, \frac{3}{t^2}\right)$

ここで, $PQ^2 = f(t)$ とすると ($t > 0$)

$$f(t) = \left(\frac{3}{2}t\right)^2 + \left(\frac{3}{t^2}\right)^2 = \frac{9}{4}\left(t^2 + \frac{4}{t^4}\right)$$

$$f'(t) = \frac{9}{4}\left(2t - \frac{16}{t^5}\right) = \frac{9(t^6 - 8)}{2t^5}$$

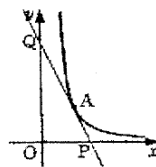
$$f'(t) = 0 \text{ を解くと } t^6 = 8 = 2^3 \text{ より } t^2 = 2$$

$$t > 0 \text{ から } t = \sqrt{2}$$

増減表は次のようになる。

t	0	...	$\sqrt{2}$...
$f'(t)$	\searrow	-	0	+
$f(t)$	\searrow	\searrow	$\frac{27}{4}$	\nearrow

$$\text{よって, } t = \sqrt{2} \text{ のとき最小値 } \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



$$(1) \quad f(x) = x^3 + x^2 + 8 - 4x^2 - 4$$

$$= x^3 - 3x + 4 \quad \text{とおくと}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

増減表は次のようになる。

x	0	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\searrow	0	\nearrow

$x > 0$ のとき $f(x) \geq f(2)$ だから

$f(x) \geq 0$ である。

よって、 $x^3 + x^2 + 8 \geq 4x^2 + 4$

$$(2) \quad f(x) = 1 + x - 2 \log(1+x)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x} = \frac{x-1}{1+x}$$

増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\searrow	$2 - 2 \log 2$	\nearrow

$$f(1) = 2 - 2 \log 2 = 2(1 - \log 2) > 0 \quad (0 < \log 2 < 1 \text{ より})$$

$x > 0$ のとき $f(x) \geq f(1)$ だから $f(x) > 0$ である。

よって、 $1 + x > 2 \log(1+x)$

(1) $x^3 - 3x + 1 = k$ として

$y' = x^3 - 3x + 1$ と $y = k$ のグラフで考える。

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	1	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	3	↘	-1	↗

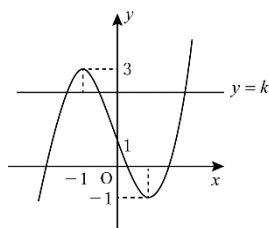
グラフは右図のようになる。

右のグラフから、異なる実数解の個数は

$k < -1$, $3 < k$ のとき 1 個

$k = -1$, $k = 3$ のとき 2 個

$-1 < k < 3$ のとき 3 個



(2)

$-2 \log x - \frac{1}{2}x^2 + 3x = k$ として,

$y = -2 \log x - \frac{1}{2}x^2 + 3x$ と $y = k$ のグラフで考える。

$$y' = -\frac{2}{x} - x + 3 = -\frac{(x-2)(x-1)}{x}$$

増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...	2	...
y'	↘	-	0	+	0	-
y	↘	↘	$\frac{5}{2}$	↗	$4 - 2 \log 2$	↘

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(-2 \log x - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-2 \log x - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) = -\infty$$

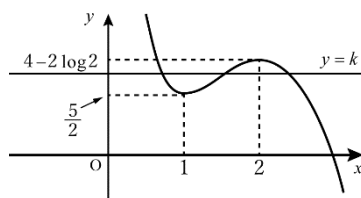
以上より、グラフは右図のようになる。

右のグラフから、異なる実数解の個数は

$k < \frac{5}{2}$, $4 - 2 \log 2 < k$ のとき 1 個

$k = \frac{5}{2}$, $4 - 2 \log 2$ のとき 2 個

$\frac{5}{2} < k < 4 - 2 \log 2$ のとき 3 個



(1) $f(x) = x^2 - 3x$, $f'(x) = 2x - 3$ だから

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c), \quad 1 < c < 3 \text{ より}$$

$$\frac{0 - (-2)}{2} = 2c - 3 \quad \therefore \quad c = 2 \quad (1 < c < 3 \text{ を満たす})$$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ だから

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(c), \quad 1 < c < 4 \text{ より}$$

$$\frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{2\sqrt{c}}, \quad 2\sqrt{c} = 3 \quad \therefore \quad c = \frac{9}{4} \quad (1 < c < 4 \text{ を満たす})$$

(3) $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$ だから

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c), \quad 0 < c < 1 \text{ より}$$

$$e - 1 = e^c \quad \therefore \quad c = \log(e - 1)$$

(4) $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$ だから

$$\frac{f(\pi) - f(0)}{\pi - 0} = f'(c), \quad 0 < c < \pi \text{ より}$$

$$\frac{0 - 0}{\pi} = \cos c \quad \therefore \quad c = \frac{\pi}{2} \quad (0 < c < \pi \text{ を満たす})$$

69 $f(x) = \cos x$ は $x > 0$ で微分可能で $f'(x) = -\sin x$ 区間 $[\alpha, \beta]$

において、平均値の定理から

$$\frac{\cos \beta - \cos \alpha}{\beta - \alpha} = -\sin c, \quad \alpha < c < \beta \quad \text{となる } c \text{ が存在する。}$$

$$\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\beta - \alpha} = \sin c \quad \text{とすると } 0 < c < \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin c < 1$$

よって, $\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\beta - \alpha} < 1$ より $\cos \alpha = \cos \beta < \beta - \alpha$ が成り立つ。

$$(1) \quad f(x) = x^3 \text{ とおくと } f'(x) = 3x^2 \\ f(2 + 0.05) \doteq f(2) + f'(2) \times 0.05 \text{ より} \\ 2.05^3 \doteq 2^3 + 3 \times 2^2 \times 0.05 = 8.6$$

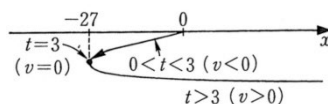
$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ とおくと } f'(x) = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} \\ f(8 + 0.3) \doteq f(8) + f'(8) \times 0.3 \text{ より} \\ \frac{1}{\sqrt[3]{8.3}} \doteq \frac{1}{\sqrt[3]{8}} - \frac{1}{3 \cdot 8\sqrt[3]{8}} \times 0.3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{160} \doteq 0.494$$

$$(3) \quad f(x) = \sin x \text{ とおくと } f'(x) = \cos x \\ 58^\circ = 60^\circ - 2^\circ = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{90} \text{ だから} \\ f\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{90}\right) \doteq f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \left(-\frac{\pi}{90}\right) \text{ より} \\ \sin 58^\circ \doteq \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} \times \left(-\frac{\pi}{90}\right) \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{3.1416}{90} \doteq 0.849$$

$$(4) \quad f(x) = \sqrt{x} \text{ とおくと } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ 6 + e = 6 + 2.7182 = 8.7182 = 9 - 0.2818 \\ f(9 - 0.2818) \doteq f(9) + f'(9) \times (-0.2818) \text{ より} \\ \sqrt{6 + e} \doteq 3 + \frac{1}{2 \cdot 3} \times (-0.2818) \doteq 2.953$$

$$(1) \quad x = t^3 - 3t^2 - 9t \text{ より} \\ \text{速度 } v \text{ は } v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t - 9 \\ \text{加速度 } \alpha \text{ は } \alpha = \frac{d^2x}{dt^2} = 6t - 6$$

$$(2) \quad v = 3(t+1)(t-3) \quad (t > 0) \text{ より} \\ t = 3 \text{ のとき } v = 0 \\ 3 < t \text{ のとき } v > 0 \\ 0 < t < 3 \text{ のとき } v < 0$$



よって、P が運動の向きを変える t の値は $t = 3$

B 問題

72

$$(1) \quad y = \log x, \quad y' = \frac{1}{x}$$

$$\text{接点の } x \text{ 座標は } \frac{1}{x} = e \quad \therefore \quad x = \frac{1}{e}$$

$$\text{接点は} \left(\frac{1}{e}, -1 \right) \text{ だから}$$

$$y - (-1) = e \left(x - \frac{1}{e} \right) \quad \text{より} \quad y = ex - 2$$

$$(2) \quad \text{接点を} (t, \log t) \text{ とおくと}$$

接線の方程式は

$$y - \log t = \frac{1}{t} (x - t)$$

$$y = \frac{1}{t} x - 1 + \log t$$

原点 $(0, 0)$ を通るから

$$\log t - 1 = 0 \quad \therefore \quad t = e$$

$$\text{よって, } y = \frac{1}{e} x$$

73

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \sqrt{x+k} \quad \text{とすると}$$

$$f'(x) = e^x, \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+k}}$$

点 P の x 座標を α とすると

$$f(\alpha) = g(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f'(\alpha) = g'(\alpha) \quad \text{であるから}$$

$$e^\alpha = \sqrt{\alpha+k} \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad e^\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\alpha+k}} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } e^\alpha = \frac{1}{2e^\alpha} \quad \text{すなわち} \quad e^{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$e^\alpha > 0 \text{ より } e^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{よって } \alpha = \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \log 2$$

$$\textcircled{1} \text{ より } k = e^{2\alpha} - \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 2$$

このとき、求める接線の方程式は

$$y - e^\alpha = e^\alpha (x - \alpha) \quad \text{であるから} \quad y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{1}{2} \log 2 \right)$$

$$\text{すなわち } y = \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{4} \log 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

74

$$f(x) = x^2 + ax + b + 6 \log(1+x) \text{ より}$$

$$f'(x) = 2x + a + \frac{6}{1+x}$$

$$f(0) = 3 \text{ より } b = 3$$

$$f'(0) = 0 \text{ より } a + 6 = 0 \text{ だから } a = -6$$

$$\text{このとき } f(x) = x^2 - 6x + 3 + 6 \log(1+x)$$

$$f'(x) = 2x - 6 + \frac{6}{1+x} = \frac{2x(x-2)}{1+x}$$

x	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	\nearrow	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	\nearrow	3	\searrow		\nearrow

上の増減表より、 $x = 0$ で極大値 3 をとり、条件をみたす。

よって $a = -6$, $b = 3$

75

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2-x+1} \text{ より}$$

$$f'(x) = \frac{a(x^2-x+1) - (ax+b)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-ax^2-2bx+a+b}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f(2) = 1 \text{ より } 2a + b = 3$$

$$f'(2) = 0 \text{ より } a + b = 0$$

これを解いて $a = 3$, $b = -3$

$$\text{このとき, } f(x) = \frac{3x-3}{x^2-x+1}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2+6x}{(x^2-x+1)^2} = -\frac{3x(x-2)}{(x^2-x+1)^2}$$

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	-3	\nearrow	1	\searrow

上の増減表より、 $x = 2$ で極大値 1 をとり、条件をみたす。

よって $a = 3$, $b = -3$

また、極小値は -3 ($x = 0$ のとき)

$$y = |x|e^x$$

(i) $x \geq 0$ のとき $y = xe^x$

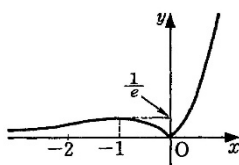
$$y' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

(ii) $x < 0$ のとき $y = -xe^x$

$$y' = -e^x - xe^x = -(x+1)e^x$$

増減表をつくると

x	...	-1	...	0	...
y'	+	0	-	/	+
y	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗



$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^x) = 0$$

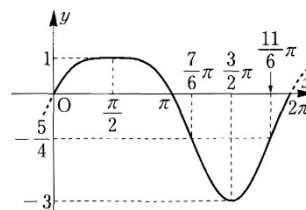
よって $x = 0$ のとき最小値 0, 最大値なし

$$(1) \quad y' = 2 \cos x - 2 \sin x \cos x = 2 \cos x (1 - \sin x)$$

$$y'' = -2 \sin x - 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 2(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)$$

これより, $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で増減表は下記のようなになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	π	...	$\frac{7}{6}\pi$...	$\frac{3}{2}\pi$...	$\frac{11}{6}\pi$...	2π
y'	+	+	0	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+
y''	-	-	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-
y	0	↗	1	↘	0	↘	$-\frac{5}{4}$	↖	-3	↗	$-\frac{5}{4}$	↗	0



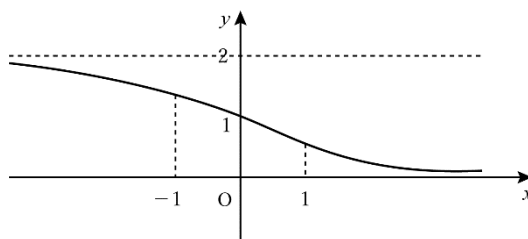
$$(2) \quad y = \frac{2}{1+e^x}, \quad y' = -\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$y' = \frac{-2e^x(1+e^x)^2 + 2e^x \cdot 2(1+e^x) \cdot e^x}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{2e^x(2e^x+1)(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1+e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1+e^x} = 2$$

x	...	0	...
y'	-	-	-
y''	-	0	+
y	↘	1	↘



78 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ とおく

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \\ &= \frac{\cos^3 x - 2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x - \cos x - 1)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(1 - \cos x)(\sin^2 x + \cos x)}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$0 < x < \frac{\pi}{3}$ のとき $f'(x) > 0$ だから $f(x)$

は増加関数である。

$f(0) = 0$ より $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $f(x) > 0$ である。

よって, $\sin x + \cos x > 2x$

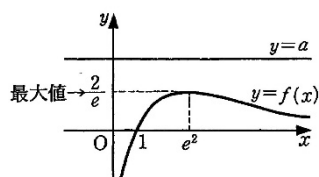
79

$a\sqrt{x} > \log x$ より $a > \frac{\log x}{\sqrt{x}}$...①

$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ とおくと $f'(x) = \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}}$

$x > 0$ における増減表は

x	0	...	e^2	...
$f'(x)$	/	+	0	-
$f(x)$	/	↗	$\frac{2}{e}$	↘



これから, $f(x)$ の最大値は $f(e^2) = \frac{2}{e}$

よって, $x > 0$ について①が成り立つ条件は $a > \frac{2}{e}$

$$(1) \quad y = x^2 + \frac{2}{x}$$

$$y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2}$$

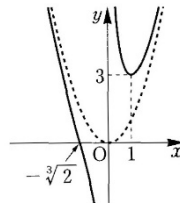
増減表は次のようになる。

x	...	0	...	1	...
y'	-	/	-	0	+
y	↘	/	↘	3	↗

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} y = -\infty$$

以上のことより，グラフは右図のようになる。



$$(2) \quad x = 0 \text{ は, } x^3 - ax + 2 = 0 \text{ の解ではないから}$$

$$x^2 + \frac{2}{x} = a \text{ と変形し, } y = x^2 + \frac{2}{x} \text{ と } y = a$$

のグラフの共有点の個数を調べる。(1) のグラフを利用して

$a < 3$ のとき 1 個

$a = 3$ のとき 2 個

$a > 3$ のとき 3 個

- (1) 台形 PABQ は
- $AP=BQ$
- の等脚台形であり,

上底 $PQ = 2a \cos \theta$, 下底 $AB = 2a$, 高さは $a \sin \theta$ であるから, 面積 S は

$$S = \frac{1}{2} (2a \cos \theta + 2a) \cdot a \sin \theta = a^2 (\cos \theta + 1) \sin \theta$$

(別解) $S = 2 \triangle OAP + \triangle OPQ$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin \theta + \frac{1}{2} a^2 \sin (\pi - 2\theta) = a^2 \left(\sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)$$

- (2) $S' = a^2 \{ -\sin^2 \theta + (\cos \theta + 1) \cos \theta \}$
 $= a^2 (2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1) = a^2 (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$

ここで $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より増減表をつくると

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$...	$\frac{\pi}{2}$
S'	\nearrow	+	0	-	\searrow
S	\nearrow	\nearrow	$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$	\searrow	\searrow

よって, $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき 最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ t 秒後の半径を r cm, 表面積を S cm², 体積を V cm³ とすると

$$S = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{時間 } t \text{ で微分すると}$$

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}, \quad \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \quad \text{より} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{r}{2} \times \frac{dS}{dt}$$

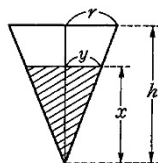
$$\frac{dS}{dt} = 4\pi \text{ で } r = 10 \text{ のときであるから} \quad \frac{dV}{dt} = 20\pi \quad \text{よって} \quad 20\pi \text{ [cm}^3/\text{秒]}$$

t 秒後の水面の高さを x cm, 水面の面積を S cm², 水の量を V cm³ とすると,

このときの水面の半径は $\frac{r}{h}x$ cm であるから

$$S = \pi \left(\frac{r}{h}x \right)^2 = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 \dots \textcircled{1}$$

$$V = \frac{1}{3} Sx = \frac{\pi r^2}{3h^2} x^3 \dots \textcircled{2}$$



②の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\pi r^2}{3h^2} \cdot 3x^2 \frac{dx}{dt} \quad \textcircled{2} \text{より} \quad \frac{\pi r^2}{3h^2} = \frac{V}{x^3} \text{ を代入すると} \\ &= \frac{V}{x^3} \cdot 3x^2 \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{3V}{x} \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

ここで, $V = wt$ より $\frac{dV}{dt} = w$ であるから

$$w = \frac{3V}{x} \frac{dx}{dt} \quad \text{すなわち} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{w}{3V} x \dots \textcircled{3}$$

水の量が v cm³ になったときの水面の高さを x_0 cm とすると

$$v = \frac{\pi r^2}{3h^2} x_0^3 \quad \text{より} \quad x_0 = \left(\frac{3h^2 v}{\pi r^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

よって, このときの水面の上昇する速度は, ③より

$$\frac{dx}{dt} = \frac{w}{3v} x_0 = \frac{w}{3v} \left(\frac{3h^2 v}{\pi r^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \left(\frac{3h^2}{\pi r^2 v^2} \right)^{\frac{1}{3}} w$$

また, ①の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot 2x \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{3V}{x^3} \cdot 2x \frac{w}{3V} x = \frac{2w}{x} \end{aligned}$$

したがって, 水の量が v cm³ になったときの水面の広がる速度は

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2w}{x_0} = 2 \left(\frac{\pi r^2}{3h^2 v} \right)^{\frac{1}{3}} w \text{ cm}^2 / \text{秒}$$