ワンポイント 教材

「整数の性質」の指導上の留意点
ー約数・倍数を基本にー

今回，学習指導要領の改訂により，数学Aで整数の性質をまとめて扱うこととなったが，そこでは，ユークリッドの互除法と不定方程式の解について理解させることが一つの大きな目標である。

これらの内容は，次の約数や倍数についての定義が基本となっている。

「a, b, cを整数として，$a=bc$のとき，
b, cはaの約数，aはb, cの倍数である。」

とくに，

「$ad=bc$で，bとdが互いに素のとき，
bはaの約数である。」

このことを用いれば，方程式の解について，次のことが示される。

（例題１）次の３次方程式が有理数解$x=\dfrac{q}{p}$（p, qは互いに素）をもつとき，pはaの約数，qはdの約数であることを示せ。

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

〈解〉$ax^3+bx^2+cx+d=0$の解が，$x=\dfrac{q}{p}$であることから，

$$a\left(\frac{q}{p}\right)^3+b\left(\frac{q}{p}\right)^2+c\left(\frac{q}{p}\right)+d=0$$

よって，$aq^3+bpq^2+cp^2q+p^3d=0$

ゆえに，$aq^3=-p\left(bq^2+cpq+p^2d\right)$

したがって，pはaの約数である。

同様に，$p^3d=-q\left(aq^2+bpq+cp^2\right)$

より，qはdの約数である。 終

４次以上の方程式についても，例題１の内容は成り立つ。

ユークリッドの互除法，及び，不定方程式の整数解も，整数の約数・倍数の定義から導かれる。

また，次のような問題もすでに大学入試に出題されている。

（例題２）素数pと整数$r\left(1\leqq r\leqq p-1\right)$について，

(1) 等式　$r\,{}_p\mathrm{C}_r=p\,{}_{p-1}\mathrm{C}_{r-1}$

を証明し，${}_p\mathrm{C}_r$はpの倍数であることを示せ。

(2) 2^pをpで割った余りを求めよ。

ただし，$p\neq 2$とする。

（奈良女子大：改題）

〈解〉(1)　$r\,{}_p\mathrm{C}_r=r\dfrac{p!}{r!(p-r)!}$

$$=p\frac{(p-1)!}{(r-1)!\{(p-1)-(r-1)\}!}$$

$$=p\,{}_{p-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

ここで，pは素数であり，$1\leqq r\leqq p-1$であるから，pとrは互いに素である。

よって，${}_p\mathrm{C}_r$はpの倍数である。

(2)　$2^p=(1+1)^p$

$$={}_p\mathrm{C}_0+{}_p\mathrm{C}_1+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}+{}_p\mathrm{C}_p$$

$$=\left({}_p\mathrm{C}_1+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}\right)+2$$

ここで，(1)より${}_p\mathrm{C}_1+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}$は$p$の倍数であるから，$2^p$を$p$で割った余りは２である。 終

また，この例題２を一般化すれば，

「pを素数，aを正の整数とするとき，a^p-a
はpの倍数である。」

これを合同式で表したものが，次のフェルマーの小定理である。すなわち，

「aとpが互いに素のとき，
$a^p\equiv a$　すなわち　$a^{p-1}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$」

今回の改訂によって，これまで以上に整数について理解が深まることが期待される。フェルマーの小定理なども，生徒の実態を考慮しつつ指導したい内容である。

通巻第61号　©編修・発行　実教出版株式会社　定　価　210円（本体200円）
2010年 10月 5日 印刷　代表者　島 根 正 幸　発行所　〒102-8377　東京都千代田区五番町５
2010年 10月 12日 発行　TEL. 03-3238-7777
http://www.jikkyo.co.jp/