大学入試にみる整数問題

雲雀丘学園中学・高等学校　永田ひろみ

入試問題での「整数の問題」というと皆さんはどんな問題を思い出されるでしょうか？

私自身は,「数学の現代化」が叫ばれていたころ,中学入試用の問題集で,ガウス記号と合同式を初めて知り，おもしろいと思ったことを覚えています。

さて,「整数の問題」はたくさんあって，暗記中心の受験生はなかなか手をつけることの出来ない分野ではないでしょうか。考えることの好きな学生を採りたいと思っている大学がこの分野の問題をよく出すのは，思考力や論証力を測るのにもってこいだからでしょう。

しかし，整数の問題をまとめて扱っている単元は今の教科書にはありません。そのことで苦労しているのは，受験生だけではないのです。実は大学側も入試の出題時にいろいろ気を遣うことがあるようです。例えば，今年の神戸大学の問題では倍数の証明問題で,「素数 p，自然数 m , n について mn が p の倍数ならば，m または n は p の倍数であることを用いてよい」とのただし書きがありました。素因数分解の一意性についての記述が現行教科書にはのっていなかったので，念のために書かれたそうです。

ここでは実際の入試問題を分類しながら紹介していきましょう。

「整数の問題」には

（ア）　因数分解の利用

（イ）　大小関係をもとに不等式で範囲を限定

（ウ）　割った余りで分類 (剰余系)

の 3 つの頻出のタイプがあります。その他にも素数やガウス記号に関するものなど様々です。

まずは（ア）（イ）のタイプから。

> 方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$ ……①
> をみたす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ について考える。
> (1) $x=1$ のとき，正の整数 y , z の組をすべて求めよ。
> (2) x のとりうる値の範囲を求めよ。
> (3) 方程式①を解け。　　　05 早稲田大・政治経済

(1)は変数が2個ですから,(ア)の因数分解の利用。分母を払って $(2y-1)(z-1)=3$ と (整数) × (整数) ＝ (整数) の形に変形しましょう。(2)(3) では変数が 3 個なので,(イ) の不等式。$y\geqq 1$, $z\geqq 1$ によって x の範囲を決定します。あとは個々の x の値に対して，y, z を決定します。

因数分解では公式を利用するものもあります。

> $a^3-b^3=65$ をみたす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。　　　05 京都大・文系

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=5\times 13$ とすればいいですね。
これは因数分解の公式

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

の $n=3$ の場合で，よく出題されています。
n が奇数のときの

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$$

を使うものはあまり出題されてはいませんが，次の様な問題もあります。

> m, n は自然数で, $m<n$ をみたすものとする。
> m^n+1，n^m+1 がともに 10 の倍数となる m , n を 1 組与えよ。　　　96 京都大・後期・理系

m , n が奇数のとき，与式がどちらも因数分解できることを利用して, 答を求めることができます。

（イ）の不等式もいろいろ出題されています。

> n を正の整数とする。実数 x, y, z に対する方程式
> $$x^n+y^n+z^n=xyz\cdots\cdots①$$
> を考える。
> (1) $n=1$ のとき，①を満たす正の整数の組 (x, y, z) で, $x\leqq y\leqq z$ となるものをすべて求めよ。
> (2) $n=3$ のとき，①を満たす正の整数の組 (x, y, z) は存在しないことを示せ。　　　06 東京大・文系

大小関係が与えられているので，不等式に持ち込むものです。まず, $n=1$ のときの①の両辺を z で割ってから不等式で評価し，$xy\leqq 3$ を導いて，答がでます。(2) は $x\leqq y\leqq z$ とすれば $xyz\leqq z^3$ とな

ることがポイントです。

（ウ）の剰余系では，合同式そのものを問題文に使っている大学もありました。

> 自然数 x, y に対して，それぞれを 100 で割った余りが等しいとき, $x \equiv y$ と書くことにする。
> (1) 自然数 m に対して, $76^m \equiv 76$ を証明せよ。
> (2) $2^n \equiv 76$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。
> (3) 2^{1001} を 100 で割った余りを求めよ。
> 00 名古屋大・後期・情報文化

値を求める剰余系の問題では，具体的に調べていくことで答を得ることができます。
余りを求める問題も出題されています。

> 7^{100} を 5 で割った余りを求めよ。
> 07 島根県立大・総合政策

$7 \equiv 2 \pmod 5), 7^2 \equiv 2 \cdot 7 \equiv 4, 7^3 \equiv 4 \cdot 7 \equiv 3, 7^4 \equiv 3 \cdot 7 \equiv 1,$ $7^5 \equiv 1 \cdot 7 \equiv 2$ となり以後，周期 5 で繰り返すことがわかります。余りの周期性はフェルマーの小定理から確認できます。そのフェルマーの小定理の証明がそのまま出題されたこともあります。

> p が素数であれば，どんな自然数 n についても $n^p - n$ は p で割り切れる。このことを，n についての数学的帰納法で証明せよ。　77 京都大・文系

解法が指定されているのですから，難しくはありませんが，今年の大阪大学の後期日程でも出題されていました。

剰余による分類を利用すると，うまく証明できる問題もあります。

> 2 以上の自然数 n に対し, n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ。
> 06 京都大・前期・理系

いわゆる「法」をなににするかがポイント。この場合は，3 を法にするとうまくいきます。

ガウス記号を使った問題もいろいろあります。小数部分を考えるか，不等式ではさむかするとうまく扱えます。

> 実数 x に対して，その整数部分を $[x]$ で表す。すなわち $[x]$ は不等式 $[x] \leqq x < [x]+1$ を満たす整数である。
> (1)　実数 x に対して，等式
> $[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$ を示せ。
> (2)　正の整数 n，実数 x に対して，等式
> $$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$$
> を示せ。　98 奈良女子大

不定方程式の問題もあります。特殊解から，一般解を求めるものです。

> (1) 直線 $7x+9y=1$ のうえの x，y がともに整数であるような座標平面上の点 (x, y) をすべて求めよ。
> (2)(1) で求めた点のうち原点からの距離が 50 以内であるものの個数を求めよ。　88 慶応大・医

約数や倍数の個数や和を求める問題も忘れてはいけませんね。それでは，素数定理が背景にみえる今年の入試問題から。

> 自然数 N は 30 の倍数である。
> $U=\{x \mid x$ は 1 以上 N 以下の奇数$\}$
> $A=\{x \mid x \in U,\ x$ は3の倍数$\}$
> $B=\{x \mid x \in U,\ x$ は5の倍数$\}$
> とし，集合 $U, A, B, A \cap B$ の要素の個数をそれぞれ u_N, a_N, b_N, c_N と表す。次の問に答えよ。
> (1) u_N, a_N, b_N, c_N を N を用いて表せ。
> (2) N 以下の素数の個数を P_N とするとき，不等式
> $$P_N \leqq u_N - a_N - b_N + c_N + 2$$
> を示せ。
> (3) (2) の P_N について，$\frac{P_N}{N} \leqq \frac{1}{3}$ を示せ。
> 10 宮城教育大

いろいろな整数の問題を紹介してきました。簡単にパターン化できるものではありませんね。まずはこれらの問題を，楽しんでみてください。教える側が面白いと思ってこそ，ではないでしょうか。印象に残った問題はありましたでしょうか。

では，最後にちょっとしゃれた問題を1つ。

> 自然数 n の関数 $f(n), g(n)$ を
> $f(n) = n$ を 7 で割った余り
> $$g(n) = 3f\left(\sum_{k=1}^{7} k^n\right)$$
> によって定める。
> (1) すべての自然数 n に対して $f(n^7) = f(n)$ を示せ。
> (2) あなたの好きな自然数 n を一つ決めて $g(n)$ を求めよ。その $g(n)$ の値をこの設問 (2) におけるあなたの得点とする。　95 京都大・後期・文系