学習指導要領解説書から予想される整数問題

福島國光

今回の学習指導要領の改訂で「整数の性質」が初めて章立てで入ってきた。整数についてはこれまで，きちんとした単元で扱われたことはなく，現行課程では，集合と論証のところや，方程式の整数解，帰納法の題材等，断片的に出てきたといった印象である。先生方の多くも，高校の時に，整数について単元としてきちっとした形で指導されたことも，教員になってから指導したこともないのではなかろうか。そこで，今回の改訂で「整数の性質」として単元化された内容について，学習指導要領の解説書からどんな問題が予想されるのか考えてみたい。ただし，レベルは基本的なものにとどめておく。

（ア）　約数と倍数

約数と倍数については小学５年で学び，中学でも公約数と公倍数の基本的な問題を扱っている。

高校では２数aとbについて, 最大公約数 (G.C.M) と互いに素である２数a'，b'を用いた表し方

$$a=Ga',\quad b=Gb'$$

を利用する問題が中心になるだろう。

２数の和が 144 で，最大公約数が 12 である２つの整数を求めよ。
２数をa, bとすると $a=12a'$，$b=12b'$（a', b'は互いに素） $a+b=12a'+12b'=144$より $a'+b'=12$ a', b'は互いに素であるから $(a',\ b')=(1,\ 11),\ (5,\ 7)$ よって，２数は$(12,\ 132),\ (60,\ 84)$

素因数分解に関連して，次のような問題も有名である。

50! を素因数に分解したとき，２の累乗は何乗になるか。
1,2,3,…,50 の中で ２の倍数は 2, 4, 8,…,50 の 25 個 2^2の倍数は 4, 8, 12,…,48 の 12 個 2^3の倍数は 8, 16, 24,…,48 の 6 個 2^4の倍数は 16, 32, 48 の 3 個 2^5の倍数は 32 の 1 個 よって，２の因数の次数は $25+12+6+3+1=47$（乗）

次に, 整数を余りによって分類することを扱う。すなわち，２つの整数a, b（$a>0$）について，

$$b=aq+r\ \ (r=0,1,2,\cdots,a-1)$$

という表し方を理解し，これを用いて整数の様々な性質を考察させるというものである。

５で割ると２余る数aと，５で割ると４余る数bがある。abを５で割った余りを求めよ。
$a=5m+2$，$b=5n+4$（m, nは整数） と表せるから $ab=(5m+2)(5n+4)$ $=25mn+20m+10n+8$ $=5(5mn+4m+2n+1)+3$ $5mn+4m+2n+1$は整数であるから abを５で割った余りは３

nが整数のとき，n^2を３で割った余りは２にならないことを証明せよ。
kを整数とすると，nは$3k$, $3k+1$，$3k+2$のいずれかで表せるから (i)　$n=3k$のとき $n^2=9k^2=3\cdot 3k^2$ よって，３で割った余りは０ (ii) $n=3k+1$のとき $n^2=(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1$ よって，３で割った余りは１ (iii) $n=3k+2$のとき $n^2=(3k+2)=3(3k^2+4k+1)+1$ よって，３で割った余りは１ (i)～(iii) より題意は示された。

これ以外に，連続する整数の積についての考察も，整数の余りによる分類で明らかになるので，次のような問題も入ってくると考えられる。

n が整数のとき，$n(n+1)(2n+1)$ は 6 の倍数であることを証明せよ。

（略解）$n(n+1)$ は連続する 2 数の積であるから 2 の倍数である。

(i) $n=3k$ のとき

（与式）$=3k(3k+1)(6k+1)$ よって，3 の倍数

(ii) $n=3k+1$ のとき

（与式）$=(3k+1)(3k+2)(6k+3)$

$=(3k+1)(3k+2)\cdot 3(2k+1)$

よって，3 の倍数

(iii) $n=3k+2$ のとき

（与式）$=(3k+2)(3k+3)(6k+5)$

$=(3k+2)\cdot 3(k+1)(6k+5)$

よって，3 の倍数

これより，与式は 2 の倍数かつ 3 の倍数であるから 6 の倍数である。

（別解）　$n(n+1)(2n+1)$

$=n(n+1)(n+2+n-1)$

$=n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)$

連続する 3 つの数の積で表せるから与式は 6 の倍数である。

また，今回登場する鳩の巣原理に関連して，次のような問題も考えられる。

相異なる整数を 4 つ選ぶと，その中には 2 つの自然数の差が 3 の倍数になるものが少なくとも 1 組あることを証明せよ。

（略解）整数を 3 で割った余りは 0 か 1 か 2 であるから，異なる 4 つの整数の中には少なくとも 1 組の同じ余りをもつ 2 数が存在する。

等しい余り $r(r=0,1,2)$ をもつ 2 数を

$a=3k+r,\ b=3l+r$（k,l は整数）

と表すと

$a-b=(3k+r)-(3l+r)=3(k-l)$

$k-l$ は整数であるから $a-b$ は 3 の倍数である。

よって，題意は示された。

剰余類を利用した整数問題は多種, 多彩であり，これまで出題されていた以上にバラエティーに富んだ問題が予想される。現在でも難関大の入試では剰余類に関する良問が出題され新鮮さを感じるが，やがてこの課程が終わる頃にはそれらの問題がスタンダードになっているかもしれない。

（イ）ユークリッドの互除法

互除法では，その仕組みを理解し，2 つの数の最大公約数を求める問題が考えられる。

1221 と 4810 の最大公約数を求めよ。

（略解）$4810=1221\times 3+1147$

$1221=1147\times 1+74$

$1147=74\times 15+37$

$74=37\times 2$　←割り切れる。

よって，最大公約数は 37

上の計算は次のように書くことが多い。

$$\begin{array}{r|c|l}
1221 & & 4810 \\
 & 3\longrightarrow & 3663 \\
\hline
1147 & \longleftarrow 1 & 1147 \\
74 & 15\rightarrow & 1110 \\
\hline
74 & \longleftarrow 2 & \ \ 37 \\
\hline
0 & &
\end{array}$$

互除法の活用として，2 元 1 次不定方程式

$$ax+by=1$$

の 1 つの解を求めることが考えられる。

$53x+37y=1\cdots$①を満たす 1 組の整数 x,y の組を求めよ。また，整数解を求めよ。

$a=53,\ b=37$ とおくと，互除法により

$53=37\times 1+16$　$a=b\times 1+16\rightarrow 16=a-b$

$37=16\times 2+5$　$b=2(a-b)+5\rightarrow 5=-2a+3b$

$16=5\times 3+1\rightarrow a-b=3(-2a+3b)+1$

ゆえに $7a-10b=1$

これより $53\times 7+37\times(-10)=1\cdots$②

よって, $(x,\ y)=(7,\ -10)$

① − ②より

$53(x-7)+37(y+10)=0$

53 と 37 は互いに素であるから, k を整数として

$x-7=-37k,\ y+10=53k$

よって，整数解は $x=-37k+7,\ y=53k-10$

なお，（ウ）整数の性質の活用（主に N 進法について）は，紙面の都合で次の機会とします。