



じつきよう

数学資料

No. 60

初等整数論とみせかけて...

横浜国立大学教育人間科学部教授 根上生也

平成 24 年度より実施される新指導要領の高校数学。毎度のことですが、そこにはいくつもの思いが込められています。そのすべてを語ることはできませんが、ここでは「数学 A」の中に新たに設けられた「整数の性質」という単元に込められた思いについて述べていきます。もちろん、文部科学省の公式見解というわけではありません。あくまで私個人の思いだと思って読んでいただければ幸いです。

その「整数の性質」の目的は、整数の性質についての理解を深め、それを事象の考察に活用できるようにすることとされています。そのために、まず、整数の約数や倍数、素因数分解を学ぶことになっています。ここでとどめてしまえば、小学校や中学校で学んできた整数の話をも復習しているようなものです。

しかし、小学校では約数や倍数という言葉に触れるだけだし、中学校で習う素因数分解も二次式の因数分解をするための準備としてさらっと扱われているだけです。経験的にどんな整数でも素数の積に分解できることを知っているけれど、その

素因数分解が一意であるという事実を証明したことはありません。

もちろん、素因数分解の一意性を厳密に証明するととなると、どれほどの高校生がついてきてくれるかは疑問です。しかし、それまでに習った数学の中に散らされていた整数の話をもひとまとめにして理解し直してみるということは、高校生にとっても重要でしょう。

続いて、ユークリッドの互除法を学び、それを二元一次不定方程式の解法に応用することになっています。さらに、二進法のように 10 以外の整数を基数とする数の表記方法を学び、整数の割り算の仕組みに基づいて、分数が有限小数または循環小数で表わされることを学びます。

このように学習内容を列挙してしまうと、初等整数論の入門書に書かれているようなことを指導すればよいように思えますね。となると、整数論に馴染みのない先生にはちょっと近づきにくい単元になってしまう恐れもあります。

でも、世間の人たちは整数の話が大好きのような気がするのですが、どうでしょうか。たとえば、

も く じ

論説		学習内容対照表	
初等整数論とみせかけて…	1	新課程と現行課程の比較…	11
特別企画		学校紹介	
緊急座談会～新学習指導要領「数学 A」について…	4	大阪府立布施工科高等学校…	12
高等学校学習指導要領		ワンポイント教材	
数学 A 目標・内容の取扱い…	9	バーコードに現れる数—いろいろな場合の数—	15

かつて小川洋子さんの『博士の愛した数式』という小説がベストセラーとなり、映画にもなりました。数学者からすると納得のいかない部分もないわけではないけれど、この小説が数学に馴染みのない人にまで数学を広めてくれたことは間違いありません。そして、その中で扱われていたのは、素数やら友愛数やらです。

要するに、整数に関することだと、四則演算に加え、割る・割られるの関係を議論する程度で楽しめる話題がたくさんあるということです。そのおかげで、意味不明な数式をこねくりまわさなくても理解できる数学に出会えることになる。数学嫌いが蔓延していることが危惧されていますが、本当は数学が好きな人はたくさんいる。ただ意味もわからずに公式を暗記して数式を計算しているだけの数学が嫌だということなのです。

となれば、数式を使わない数学を学校教育にも導入すれば、数学嫌いを減らす効果があるのではないかという発想に至るわけです。そして、私は離散数学を導入すべきだといろいろなところで主張してきました。有限・離散の構造を対象として、絵を描き、簡単な計算をして、言葉で考える。そういう活動を実践できるのが離散数学です。あまり知識を前提とせず、自分自身の理解を積み重ねることで問題に取り組めるので、従来の数学に苦手意識を持っている生徒でも入りやすい。

10年くらい前に現場の先生に対して「離散数学という言葉を知っていますか？」と聞くと、「はい」と答える人は皆無に等しかった。でも、最近はいろいろなところで顔を出しているの、聞いたことはあるという先生が増えてきています。

たとえば、専門分野でいうと、点と線からなる図形を研究対象とする「グラフ理論」が離散数学の大きな部分を占めています。そして、「数学基礎」の発展形として今回の新学習指導要領に登場した「数学活用」の中にグラフ理論は顔を出します。それは、数学が苦手な生徒でも気軽に参加できて、カーナビの経路探索のように、日常生活で数学が役に立っていることを実感させられるものとして期待されています。

実は、専門家の中には離散数学は「組合せ論」と同義だという人たちがいます。ある意味ではそのとおりなのですが、名前が違えば、当然、そこに込められている気持ちも変わってくる。実際、「組合せ」という言葉を聞けば、多くの人たちは順列や組合せなどの数え上げを連想するでしょう。となれば、それはもはや数学Aの中に併設されている「場合の数と確率」のうちで指導されるべきものです。

その一方で、「離散数学」と言えば、原理や構造に注目した論証に力点が置かれます。つまり、論証の過程で場合の数を評価するということはあるかもしれないけれど、そこが到達点ではない。それを根拠にある現象を解き明かすことに主眼が置かれる。

たとえば、あのレオナルド・ダ・ヴィンチが描いた「最後の晩餐」の絵を思い浮かべてください。その中に、誕生日が同じ人がいると言われたら、あなたは どう思いますか。

もちろん、真中に整然と座っているキリストは12月生まれですが、他の12人の弟子たちの誕生日は記録には残っていないそうです。でも、数学的な原理によって、キリストも含めた13人の中に誕生日が同じ人がいることがわかるのです。だって、彼らの誕生日の候補となるべき月は12しかないからです。それなのに人が13人もいます。となれば、どこかの月が重複して当然ですね。

この当然と思うこと、つまり、入れ物の個数より入れる物の個数の方が多いと、どこかの入れ物に2つ以上の物が入ってしまうということは、誰もがそうだと思うけれど、もはや証明できない。そういう証明不可能だけれど正しい命題を数学では「原理」と呼びます。(一方、他の事柄を根拠に証明できる命題が定理です。)特に、ここで使われた原理は「鳩ノ巣原理」と呼ばれています。

私個人としては残念なことなのですが、学習指導要領の解説の中では、併記されているものの、この「鳩ノ巣原理」が「部屋割り論法」と呼ばれています。確かに後者で呼ばれていた時代もありましたが、私のこれまでの著作の中ではすべて

「鳩ノ巣原理」という言葉を使ってきました。それに離散数学の専門家の間ではこの原理は英語で「Pigeon Hole Principle」と呼ばれているのです。

個人的な愚痴はこのくらいにしておきますが、鳩ノ巣原理が高校数学に導入されたことは画期的なことです。離散数学が高校数学の1つの単位として名を連ねるようになるには、もう少し離散数学が現場の先生たちに浸透していないと難しいでしょう。将来的にそうなるとして、そのための布石が打たれたように思います。

いずれにせよ、鳩ノ巣原理（あえて、部屋割り論法と言わない）は「整数の性質」に登場します。正確に言うと、学習指導要領の本文にはありませんが、解説の中に登場します。しかも、どんな分数も有限小数か循環小数で表わされることを論証するために使われます。念のため、それを解説しておく、次のとおりです。

分数が表わしている実数は、分子を分母で割ったときの商として与えられます。なので、実際にその割り算を筆算でやってみることを考えましょう。その計算が終了するのは、割り算の余りが0になったときです。もし余りが0でなければ、さらに割り算を続けていくわけですが、余りとして現れる数は割る数（＝分母）未満の数です。

ということは、その余りの候補の個数は分母の値以下です。なので、余りが0にならず、割り算が無限に繰り返すとすると、同じ数が余りとして何回も現れることになります。そして、余りとして同じ数が現れた時点から同じ割り算が繰り返され、割り算の答えとして並ぶ数が循環します。

では、どこで鳩ノ巣原理が使われたのでしょうか。それを指摘するには、入れ物が何で、入れる物が何かを明らかにすればよい。その入れ物は分母以下の数が書かれた箱、入れられる物は1回の割り算をするたびに現れる余りが書かれたボールです。そして、そのボールはそこに書かれた数と同じ数の書かれた箱の中に入れられます。箱の個数は有限なのに、ボールは無限だから、どこかの箱にはたくさんのボールが入ることになります。

さて、このような論証を今までの高校数学で

行ったことがあるでしょうか。今までは、証明といっても、きちんと計算して答えを導くというスタイルのものが多かった。なので、論証指導をしたところで、数学はとにかく計算だというイメージを生徒たちに植え付けてしまう。でも、今述べた証明なら、計算数学にうんざりしている生徒の耳にも届くのではないのでしょうか。なぜなら、言葉だけで説明されているからです。

実は、学習指導要領の本文の中に「整数に関連した事象を論理的に考察し表現すること」というフレーズがさりげなく書かれています。誰でも論理的な考察は重要なことだと思うから、当然のこととして流し読みしてしまうフレーズではありますが、そこにはさがりがなく重たい意味が込められているのです。

整数を高校生的に扱おうとすると、ついつい一般的な場合を想定して数式で表現し、それを計算して、目的の事実を確認するという手段に訴えてしまうでしょう。それはそれで必要なことだけれど、わざわざ数式で表現するまでもなく、言葉で表現すればよいこともたくさんあります。そういう言葉で考える数学を実践する場として、「整数の性質」が使われるとよい。

そう思うと、この単元を初等整数論の入門編と捉えて指導したのではもったいない。約数・倍数の関係にしる、ユークリッドの互除法にしる、一般的な記数法にしる、数式を使った一般論として形式的に説明するのではなく、論証という言葉活動を体験するように授業が展開されるとよいと思います。そして、欲を言うならば、フェルマーの最終定理やリーマン予想についての「お話」も生徒にしてあげられるといいですね。

それにしても1つだけ不可解なことがあります。それは、整数の性質を扱うことになっているのに、「素数」という言葉がどこにも現れていないことです。本文にも解説にも…。