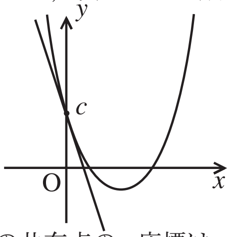
教材ワンポイント

関数のグラフの接線と方程式
ーy 軸上の点での接線の利用ー

2次関数や3次関数の増加・減少を調べ，そのグラフをかくには，導関数が利用される。

特に，グラフの接線については，次のことが成り立つ。



2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフの y 軸上の点（0，c）における接線は，$y'=2ax+b$ だから，$x=0$ のとき，$y'=b$ より，$y=bx+c$

また，この接線とグラフとの共有点の x 座標は，

$$ax^2+bx+c=bx+c$$

より，　$x=0$（重解）

同様に，3次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフの y 軸上の点（0，d）における接線は

$$y=cx+d$$

であり，この接線とグラフとの共有点の x 座標は，

$$ax^3+bx^2+cx+d=cx+d$$

より，

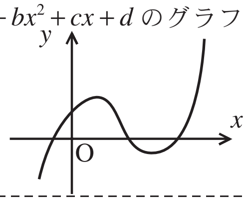
$$x=0\text{（重解）},\ -b/a$$

このことを利用して次の問題を考えてみよう。

（例題 1）3次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフが，右図のようになっているとき，

a，b，c，d

の符号をいえ。



〈解〉グラフの形から，

$$a>0$$

また，グラフの y 切片が正であるから，

$$d>0$$

さらに，この y 切片での接線が $y=cx+d$ であり，右上がりの直線であるから，

$$c>0$$

接線とグラフとの共有点の x 座標が，

$$x=0\text{（重解）},\ -b/a$$

であり，$-b/a$ は $x>0$ の範囲にあるから，

$-b/a>0$ より　$b<0$

終

さらに，4次関数について，

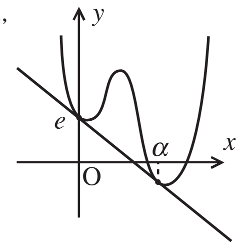
$y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ のグラフの y 軸上の点（0，e）における接線は，

$$y=dx+e$$

であり，この接線が再び $x=\alpha$ に対応する点で接するとき，この4次関数は

$$y=ax^2(x-\alpha)^2+dx+e$$

と表される。



（例題 2）グラフが，2点（1，3），（4，0）で同一の直線に接する4次関数

$$y=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

を求めよ。

〈解〉この4次関数のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動した4次関数は，

2点（0，3），（3，0）を通る共通接線が

$$y=-x+3$$

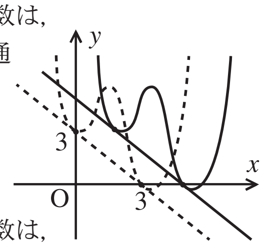
であることから，

$$y=x^2(x-3)^2-x+3$$

よって，求める4次関数は，

$$y=(x-1)^2(x-4)^2-(x-1)+3$$

$$=x^4-10x^3+33x^2-41x+20$$



終

一般に，$p(x)$ を x の2次以上の整式として，関数の $y=p(x)+mx+n$ のグラフの y 軸上の点（0，n）における接線は，

$$y=mx+n$$

であり，この接線とグラフとの共有点の x 座標は方程式　$p(x)=0$

の解である。

このことは，微分法から導かれることがらであるが，他にもいろいろな応用が考えられる。

最後に，（例題1）の類題として，次のような問題も生徒に考えさせてみたい。

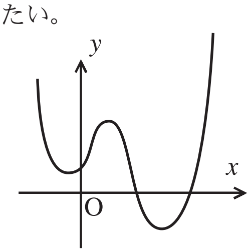
4次関数

$y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

のグラフが，右図のようになっているとき，

a，b，c，d，e

の符号をいえ。



通巻第59号　©編修・発行　実教出版株式会社　定価 210円（本体200円）

2009年 10月 5日 印刷　代表者 島根正幸　発行所 〒102-8377 東京都千代田区五番町 5

2009年 10月 10日 発行　TEL. 03-3238-7777

http://www.jikkyo.co.jp/