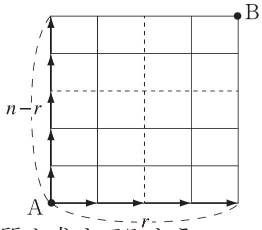
教材ワンポイント

組合せの数 $_nC_r$ に関する一考察

― 組合せと最短経路 ―

r 個の→と $n-r$ 個の↑を１列に並べる並べ方の総数は，n 個の場所から r 個の場所を選んで，→を並べる場合の数であるから，その数は $_nC_r$ となる。

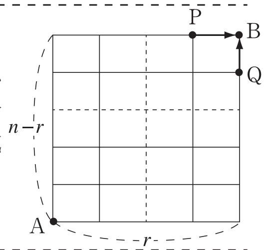


これは，右の図のような碁盤の目の道路の，地点Ａから地点Ｂまでの最短経路の総数でもある。

この最短経路の総数を考えて，組合せに関する性質を求めてみよう。

（性質１）右の図のような碁盤の目の道路で，地点ＡからＢまでの最短経路を考えて，次の性質が成り立つことを示せ。

$$_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$$



＜解＞地点ＡからＢまでの最短経路は，ＡからＰを通ってＢに行く場合と，Ｑを通ってＢに行く場合とがあり，その行き方は重複しない。

また，ＰからＢへの行き方，ＱからＢへの行き方は，それぞれ１通りである。

地点ＡからＰまでの最短経路の総数は $_{n-1}C_{r-1}$ であり，ＡからＱまでの最短経路の総数は $_{n-1}C_r$ であるから，和の法則と積の法則より，

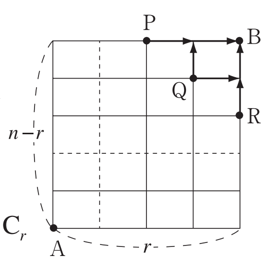
$$_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}\times1+{}_{n-1}C_r\times1$$

すなわち，　$_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$　＜終＞

この性質は，最短経路の総数があのパスカルの三角形で次々に求められることを示してもいる。

（性質２）右の図のような碁盤の目の道路で，地点ＡからＢまでの最短経路を考えて，次の性質が成り立つことを示せ。

$$_nC_r={}_{n-2}C_{r-2}+2{}_{n-2}C_{r-1}+{}_{n-2}C_r$$



＜解＞地点ＡからＢまでの最短経路は，ＡからＰを通ってＢに行く場合と，Ｑを通ってＢに行く場合と，Ｒを通ってＢに行く場合とがあり，それらの行き方は重複しない。

また，ＰからＢへの行き方は１通り，ＱからＢへの行き方は２通り，ＲからＢへの行き方は１通りずつある。

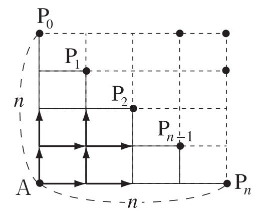
よって，ＡからＢまでの最短経路の総数 $_nC_r$ について，和の法則と積の法則から，

$$_nC_r={}_{n-2}C_{r-2}\times1+{}_{n-2}C_{r-1}\times2+{}_{n-2}C_r\times1$$

すなわち，$_nC_r={}_{n-2}C_{r-2}+2{}_{n-2}C_{r-1}+{}_{n-2}C_r$

＜終＞

（性質３）右の図のような碁盤の目の道路で地点Ａからの最短経路を考えて，次の性質が成り立つことを示せ。



$$_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n=2^n$$

＜解＞Ａから P_0，P_1，P_2，…，P_{n-1}，P_n に行く最短経路の総数は，それぞれ，

$$_nC_0,\ {}_nC_1,\ {}_nC_2,\ \cdots\ {}_nC_{n-1},\ {}_nC_n$$

である。

これらの総数は，地点Ａを出発して各交差点でそれぞれ２通りの行き方を選ぶ行き方に一致し，積の法則から全部で 2^n 通りある。

よって，和の法則から，

$$_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n=2^n$$

＜終＞

以上のように，最短経路の総数を考えることにより，組合せに関する性質を求めることができる。

次の性質も同様に求めることが出来る。生徒に考えさせてみたい。

$$\begin{aligned}&{}_{2n-1}C_0+{}_{2n-1}C_2+\cdots+{}_{2n-1}C_{2n-2}+{}_{2n-1}C_{2n-2}\\&={}_{2n-1}C_1+{}_{2n-1}C_3+\cdots+{}_{2n-1}C_{2n-3}+{}_{2n-1}C_{2n-1}\\&=2^{2n-2}\end{aligned}$$

通巻第57号　©編修·発行　実教出版株式会社　定　価　210円（本体200円）
2008年 10月 5日 印刷　代表者　島根正幸　発行所　〒102-8377　東京都千代田区五番町５
2008年 10月 10日 発行　TEL. 03-3238-7777
http://www.jikkyo.co.jp/