研 究 報 告

ある期待値について

富山県立小杉高等学校　神谷　潔

はじめに

「期待値」については生徒は数学Ａで学習する。この授業を担当しているが，以下の内容は生徒には理論的理解が困難なので，自分だけでの実践内容であることを最初にお断りしておく。

＜問題１＞

１から n までの数字が記入してある番号札 n 枚を横一列にランダムに並べるとする。「一番左から i 番目（$1 \leqq i \leqq n$）にちょうど数字 i の番号札がくる番号札の枚数」の期待値 E を求めよ。

：解答：

問題の条件に適する番号札の枚数を k とすると，番号が不一致である番号札の枚数は $(n-k)$ 枚である。ここで $(n-k)$ 枚の番号が不一致である場合の数を a_{n-k} とおくと「k 枚の番号が一致して，$(n-k)$ 枚の番号が不一致」である場合の数は ${}_n\mathrm{C}_k \cdot a_{n-k}$ である。この確率を P_k とすると，$P_k={}_n\mathrm{C}_k \cdot a_{n-k}/n!$ である。ここで $k=0,1,2,\cdots,n\text{-}2,n$ である。（$k=n-1$ の場合は $k=n$ の場合に帰するので除いてよい)。

当然，これらすべての k について確率 P_k の和は, 1である。ここで左辺を変形して

$$\sum_{k=0}^{n-2} P_k + P_n = 1 \quad \text{ここで，} P_o = \frac{a_n}{n!},\ P_n = \frac{a_0}{n!} = \frac{1}{n!}$$

より　$P_o + \sum_{k=0}^{n-2} P_k + P_n = 1$　に代入

$$\frac{a_n}{n!} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{{}_n\mathrm{C}_k\, a_{n-k}}{n!} + \frac{1}{n!} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

以上より

$$E = 0 \times \mathrm{P}_o + \sum_{k=1}^{n-2} k \cdot \frac{{}_n\mathrm{C}_k\, a_{n-k}}{n!} + \mathrm{n} \times \frac{1}{n!}$$

$$= 0 \times \frac{a_n}{n!} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{n_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\, a_{n-k}}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

$\sum_{k=1}^{n-2}$ の右部分で　$k_n\mathrm{C}_n = n_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ を利用すると

$$= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\, a_{n-k}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

ここで $k=1$ の場合を切り離して

$$= \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \cdot a_{\{(n-1)-(k-1)\}}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \quad \cdots ②$$

②は①の左辺において分母・分子の n を $(n-1)$, k を $(k-1)$ で置き換えたものである。これは①の左辺において n を $n-1$ に置き換えたものであるから② $=1$

よって $E=1$（n に無関係)

このことを実験で確かめたいが，私個人はどうも番号札（カード）を短時間でうまく切って短時間で並べて記録して多くの実験回数をやり遂げるという自信が持てなかったので，次のようにサイコロを利用することにした。

● $n=4$ の場合

：準備要領：

正四面体のサイコロを４個用意する。１つのサイコロの４面すべてに１と記入された(正三角形)紙片を張り付ける。この要領で残り３個のサイコロを順次「４面すべて２」,「４面すべて３」,「４面すべて４」と記入された（正三角形）紙片を張り付け『衣替え』させる。ここでこのサイコロ４個を同時に横方向に投げて最も左の位置にあるサイコロの『目の数』から順に右の位置にあるサイコロの『目の数』を表に記入する。(表は次ページ)

＜サイコロの上下の位置関係は無関係とする＞

ここでできた４個の数字の順列と順列１，２，３，４を対応させて一致するものがあればその数字を○で囲む。この操作を繰り返す。

記入表：($n=4$)　　100回試行

1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
2 3 4 1	4 1 ③ 2	4 ② 1 3	2 3 4 1	3 4 2 1
3 ② 4 1	3 4 2 1	4 ② ③ 1	① 3 2 ④	2 3 1 ④
3 ② 1 ④	3 4 2 1	2 1 ③ ④	① 3 4 2	3 ② 4 1
2 1 ③ ④	2 3 1 ④	3 1 2 ④	① 3 4 2	① 4 ③ 2
3 ② 1 ④	3 1 4 2	2 4 ③ 1	4 3 2 1	① 4 2 3
① 3 2 ④	2 3 4 1	① 3 4 2	2 1 4 3	3 4 1 2
① 3 2 ④	3 4 2 1	2 4 ③ 1	3 1 4 2	① 3 2 ④
2 3 1 ④	① ② ③ ④	4 1 ③ 2	4 3 1 2	① 4 ③ 2
3 1 2 ④	3 ② 4 1	① 3 4 2	2 3 1 ④	4 3 1 2
4 3 1 2	2 4 ③ 1	4 1 ③ 2	4 ② 1 3	3 ② 4 1
4 ② 1 3	3 1 4 2	3 ② 4 1	3 1 4 2	4 ② ③ 1
4 3 1 2	2 3 4 1	2 1 ③ ④	2 4 1 3	4 3 1 2
4 ② ③ 1	3 ② 4 1	4 ② 1 3	3 ② 4 1	4 1 2 3
3 4 1 2	4 ② 1 3	4 1 ③ 2	① 4 ③ 2	① 4 2 3
4 3 1 2	4 1 ③ 2	3 4 1 2	2 4 ③ 1	4 3 2 1
4 1 ③ 2	2 3 4 1	① 3 2 ④	2 1 4 3	4 1 2 3
4 3 2 1	2 1 ③ ④	2 4 ③ 1	3 ② 1 ④	① 4 2 3
3 4 1 2	4 1 2 3	3 ② 1 ④	3 4 2 1	3 4 1 2
① 4 2 3	① ② 4 3	2 3 4 1	① 4 2 3	2 3 4 1
2 1 4 3	4 ② 1 3	3 1 2 ④	2 3 4 1	3 4 1 2

＊上記の実験（ $n=4$ ）100 回試行において一致した数字の個数　(最も左の段の上から下へ順に「一致した数字の個数」を並べてから右の段に移って同様に並べてある)

0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 0,
1, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0,
1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 4, 1, 1,
0, 0, 1, 1, 1, 0, 2, 0, 2, 1,
1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 2, 0, 1,
0, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1,
0, 0, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 0,
0, 1, 1, 2, 1, 0, 2, 2, 0, 1,
2, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0,

(合計 100 個)

＊「一致した数字の合計」84（個）であることから平均値（期待値）＝ 84/100 ＝ 0.84（個）である。これは理論値 1 と大きく離れている。

参考：「100 回のうち一致した数字なし＝ 39 回」の相対度数は 39/100 ＝ 0.39 である。因みに (モンモールの問題における確率) の理論値は, $\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$ = 約 0.38 である。

● $n=6$ の場合

: 準備要領 :

普通のサイコロを 6 個用意する。1 つのサイコロの 6 面すべてに 1 と記入された小正方形を張り付ける。この要領で残り 5 個のサイコロを順次「6 面すべて 2」,「6 面すべて 3」,「6 面すべて 4」,「6 面すべて 5」,「6 面すべて 6」に『衣替え』させる。ここでこのサイコロ 6 個を同時に横方向に投げて最も左の位置にあるサイコロの『目の数』から順に右の位置にあるサイコロの『目の数』を表に記入する。<サイコロの上下の位置関係は無関係とする>ここでできた 6 個の数字の順列と順列 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 を対応させて一致するものがあればその数字を〇で囲む。この操作を繰り返す。

記入表：($n=6$)　　100回試行

1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6
3 1 5 2 6 4	6 3 4 1 ⑤ 2	2 5 4 6 3 1	2 1 6 5 3 4
5 3 2 6 1 4	6 3 5 ④ 2 1	4 3 2 5 6 1	① 4 6 5 3 2
3 4 2 6 ⑤ 1	6 4 1 3 2 5	6 ② 5 ④ 3 1	2 6 4 5 1 3
3 5 1 ④ 6 2	4 1 2 5 6 3	5 ② 4 6 1 3	2 1 4 5 6 3
6 5 4 2 3 1	6 5 ③ 1 2 4	① 4 ③ 2 6 5	2 4 6 1 ⑤ 3
6 1 4 5 3 2	4 5 1 3 6 2	4 5 ③ 6 2 1	3 1 5 2 6 4
6 1 4 3 2 5	5 4 2 6 3 1	6 3 2 ④ ⑤ 1	2 6 5 3 1 4
5 6 4 1 3 2	3 1 2 5 6 4	3 4 5 2 6 1	① ② 5 6 4 3
4 1 2 6 ⑤ 3	5 ② 1 3 4 ⑥	① 5 2 6 3 4	6 5 ③ 1 2 4
4 ② 5 6 3 1	6 3 5 ④ 2 1	① 6 2 3 4 5	4 6 5 2 1 3
6 5 ③ 2 4 1	3 1 5 ④ 2 ⑥	6 5 1 3 4 2	4 ② 5 6 3 1
6 1 4 2 3 5	3 1 5 2 4 ⑥	4 1 5 3 6 2	5 6 4 3 1 2
① 4 ③ 2 ⑤ ⑥	3 1 6 ④ 2 5	5 4 ③ 1 2 ⑥	6 3 5 2 1 4
① ② 6 3 4 5	6 4 2 1 3 5	6 4 5 3 2 1	3 4 6 1 2 ⑤
① ② 4 5 3 ⑥	① 6 4 3 2 5	5 3 6 ④ 2 1	2 5 4 6 3 1
3 4 5 6 1 2	5 4 6 1 3 2	① ② 4 3 6 5	5 ② 4 3 ① ⑥
① ② 4 5 3 ⑥	3 5 2 ④ 6 1	3 ② 1 ④ 6 5	5 3 4 1 2 ⑥
6 4 ③ 5 2 1	4 3 6 5 1 2	① 3 5 6 2 4	5 ② 1 ④ 3 ⑥
4 6 5 3 1 2	3 4 1 6 2 5	2 5 ③ 6 4 1	① ② 5 6 4 3
① 6 5 3 4 2	3 6 5 ④ 2 1	6 1 ③ 2 ⑤ 4	① ② 6 3 ⑤ 4
5 3 6 ④ 2 1	6 4 ③ 2 1 5	3 1 2 6 ⑤ 4	6 3 2 5 1 4
2 4 ③ 6 ⑤ 1	3 1 2 6 ⑤ 4	① ② 4 5 3 ⑥	2 6 1 5 4 3
5 1 4 6 3 2	① 5 4 ③ 6 2	3 6 4 1 2 5	2 1 5 ④ 3 ⑥
2 4 1 6 ⑤ 3	2 6 4 5 3 1	① ② 6 ④ 3 5	5 4 6 1 2 3
6 1 4 5 2 3	2 3 4 5 1 ⑥	⑥ 4 ③ 5 1 2	① ② 4 5 6 3

＊上記の実験（ $n=6$ ）100 回試行において一致した数字の個数　(最も左の段の上から下へ順に「一致した数字の個数」を並べてから右の段に移って同様に並べてある)

0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1,
1, 0, 4, 2, 3, 0, 3, 1, 0, 1,
1, 2, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1,
0, 0, 0, 2, 1, 2, 1, 1, 0, 1,
0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1,
0, 0, 2, 1, 2, 1, 2, 0, 1, 1,
0, 0, 2, 0, 1, 2, 2, 1, 1, 2,
1, 3, 0, 3, 1, 0, 1, 0, 0, 1,
0, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0,
2, 1, 3, 2, 3, 0, 0, 2, 0, 2,

(合計 100 個)

＊「一致した数字の合計」90（個）であることから平均値（期待値）＝ 90/100 ＝ 0.90（個）である。これは理論値 1 と離れている。

参考：「100 回のうち一致した数字なし＝ 41 回」の相対度数は 41/100 ＝ 0.41 である。因みに

（モンモールの問題における確率）の理論値は，
$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}$=約 0.37 である。
備考：$n=4$ の場合の実験に正四面体のサイコロを用意したが，感覚的にフィットするということで利用したのであり，本質的には『普通の（正六面体）サイコロ』４個に同じ『衣替え』をすればよい。$n=5$ の場合も同様に『普通の（正六面体）サイコロ』５個に同じ『衣替え』をすればよい。このように実験については『普通の（正六面体）サイコロ』を必要な個数（n の値）だけ準備すればよいことになる。

＜問題２＞

１から n までの数字が記入してある番号札 n 枚が横一列にこの順に並んでいるとする。次に１から n までの数字が記入してある番号札 n 枚をもう一組用意する。この n 枚から１枚をランダムに取り出すとき，その番号が１と一致するかどうかを確認する。次に取り出した番号札を元に戻して同様に n 枚から１枚をランダムに取り出してその番号が２と一致するかどうかを確認する。同様に i 回目の操作では n 枚から１枚をランダムに取り出してその番号が i と一致するかどうかを確認する。この操作を n 回繰り返して終了する。番号札の数字が一致する回数 k（$0 \leqq k \leqq n$）の期待値 E を求めよ。

：解答：

n 回の各回において一致する番号札を引く確率はすべて１／n（一定）である。すなわち，この確率分布は二項確率分布 $B(n,\ 1/n)$ であるから $E=n\cdot(1/n)=1$（n に無関係）

このことの実験は前述の場合と同様にサイコロを利用することにした。

● $n=4$ の場合

：準備要領：

正四面体のサイコロを１個用意する。１つのサイコロを４回振って出た目を順に表に記入する。i 番目（$i=1, 2, 3, 4$）に出た目の数が i に一致するときその数字を○で囲む。この操作を繰り返す。

記入表：（$n=4$）　　100回(復元)試行

1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
2 3 4 ④	① 1 4 3	4 1 ③ 3	4 3 4 1	3 1 4 1
3 3 1 1	① 4 ③ 2	① 4 ③ ④	4 3 2 2	① ② 1 2
2 3 ③ 3	4 3 ③ 2	2 1 ③ 3	2 1 ③ ④	2 4 ③ 1
2 ② 1 2	① ② 4 1	3 1 1 3	① 3 ③ 1	2 3 1 1
3 3 ③ 2	① 1 2 1	4 3 1 2	2 3 1 1	① 1 1 3
2 3 1 ④	① ② 4 1	4 1 2 1	① 4 ③ ④	2 ② 1 1
① ② 4 2	4 1 ③ 2	4 1 2 2	4 4 ③ 1	4 1 ③ 1
2 1 4 ④	4 1 2 1	3 4 1 2	3 3 4 2	2 ② 1 ④
3 3 4 2	① ② 2 ④	① ② ③ 1	① 1 ③ ④	2 ② 4 3
4 4 1 3	① 4 ③ ④	① 4 1 1	① 4 1 ④	① 1 1 3
4 ② 2 2	3 3 1 ④	① 1 4 2	2 ② 4 ④	3 1 ③ ④
3 4 1 ④	2 1 ③ ④	3 3 4 2	3 ② ③ ④	3 ② ③ ④
4 ② 1 ④	3 ② 2 ④	① ② ③ 2	2 ② 2 ④	4 1 2 1
2 1 ③ 2	① ② 1 2	① 3 2 2	① ② 1 ④	4 1 4 ④
① 4 2 1	① ② 1 3	2 ② ③ 3	2 ② 4 ④	4 ② ③ ④
① ② 1 ④	3 3 ③ 2	4 4 4 3	4 4 2 3	4 ② 4 2
3 3 1 1	4 4 2 ④	① 4 1 ④	4 1 1 3	2 1 ③ 2
4 ② 4 2	4 3 1 2	① 1 4 3	① 3 ③ 2	3 3 4 2
2 1 1 ④	3 3 1 1	3 ② ③ 3	4 1 1 1	3 3 4 3
3 4 1 3	2 3 ③ 3	3 4 ③ 1	2 4 ③ 1	① 3 2 1

＊「一致した数字の合計」119（個）であることから平均値（期待値）＝ 119/100 ＝ 1.19（個）である。これは理論値１と大きく離れている。

● $n=6$ の場合

：準備要領：

普通の（正六面体）のサイコロを１個用意する。以下は $n=4$ の場合と同様である。

記入表：（$n=6$）　　100回(復元)試行

1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6
5 1 2 6 1 1	2 1 5 5 6 2	6 1 ③ ④ 6 5	4 ② 6 3 ⑤ 4
4 6 ③ 3 ⑤ 2	4 6 1 3 3 4	5 5 2 5 6 ⑥	3 1 4 1 1 5
3 4 ③ 5 3 5	① 5 6 3 2 3	5 4 6 1 3 4	6 1 6 ④ 3 1
① 4 ③ 2 3 2	3 1 2 5 2 2	2 6 5 ④ 4 4	4 5 5 6 ⑤ 2
2 3 4 6 ⑤ 2	6 1 2 5 6 4	3 ② 5 5 6 ⑥	4 4 2 5 4 ⑥
① 6 6 ④ 4 2	2 5 ③ ④ 1 3	5 1 4 ④ ⑤ 3	6 6 ③ 6 ⑤ 5
2 6 4 2 ⑤ 3	2 1 6 6 ⑤ 3	6 6 ③ ④ 1 3	① ② 4 3 ⑤ 5
2 3 4 5 ⑤ 1	6 5 5 ④ 3 5	6 6 2 2 3 2	6 6 1 2 6 3
4 4 5 3 ⑤ 5	2 ② 1 6 1 1	2 1 5 6 2 4	5 5 4 3 1 2
5 6 4 6 3 ⑥	4 5 6 ④ 1 4	2 ② 1 3 3 3	3 4 1 ④ 1 ⑥
6 3 4 ④ 2 5	4 4 6 5 1 3	4 5 4 2 3 1	6 1 1 2 3 2
6 1 4 3 ⑤ 5	2 4 4 5 3 3	4 ② 5 1 4 4	3 1 5 5 ⑤ 1
5 4 5 3 ⑤ 4	2 6 6 5 1 3	2 1 2 ④ 2 4	2 1 4 1 6 2
2 6 ③ 2 ⑤ 4	3 4 5 1 6 5	① 3 6 ④ ⑤ ⑥	4 6 1 3 3 ⑥
2 4 6 1 1 4	6 3 5 6 6 1	① 3 2 1 1 ⑥	4 6 ③ 3 1 1
4 ② ③ ④ 4 3	4 5 4 1 3 1	3 3 1 2 2 3	6 1 2 3 ⑤ 5
5 3 6 3 ⑤ 5	5 ② 1 1 1 4	2 6 4 1 6 4	4 ② ③ 5 3 4
① 5 5 1 6 ⑥	6 ② 5 3 ⑤ ⑥	6 1 1 6 1 1	6 6 1 3 1 3
5 6 6 ④ 3 ⑥	4 6 2 ④ 6 ⑥	6 3 2 ④ 3 1	① 6 2 2 4 4
① 5 4 2 ⑤ 2	① ② 6 3 6 4	3 3 6 1 3 2	3 4 6 3 6 5
① 3 6 5 6 3	3 5 6 5 3 5	① 6 5 1 ⑤ 1	6 1 6 3 2 2
① 6 ③ 1 6 1	3 5 2 ④ 2 5	① 6 ③ 2 ⑤ 1	① 6 4 5 1 2
2 ② 6 2 ⑤ 3	2 ② 5 ④ 6 5	4 5 4 3 ⑤ 4	2 3 2 ④ 3 2
4 4 2 5 1 4	2 3 ③ 5 1 4	2 4 6 1 4 4	4 3 5 1 4 1
6 3 5 3 4 2	3 1 6 5 3 ⑥	① 1 5 2 6 2	6 4 2 1 1 1

＊「一致した数字の合計」が 100（個）であることから平均値（期待値）＝ 100/100 ＝ 1（個）である。これは理論値１と一致している。

市販のサイコロで実験したが，数個のサイコロを買っておいて各目が同等に出るか事前実験してから本実験をしなかったことが気になっている。