

放物線と円の間

福岡県・明治学園高等学校教諭・松田康雄

はじめに

放物線と円はなじみにくく、間に溝みたいなの
のが感じられ授業でも苦労するところである。そ
の溝を少しでも埋めるための公式を、本稿で紹介
したい。

1. 放物線の中で接する円の公式

最初は、放物線の中で接する円の方程式を考
えてみよう。

命題 1. 放物線 $C: y = ax^2 + bx + c$ に対して、

C 上 $y = \alpha$ の 2 点で接する円の方程式は

$$y = ax^2 + bx + c + a(y - \alpha)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

と表される。

命題 1 の証明. 求める円は、放物線 C の軸

$x = -\frac{b}{2a}$ ($= p$ とおく) に関して対称なので、

中心 (p, q) 、半径 r とおけて、方程式

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

と表される。放物線 C と円 $\textcircled{2}$ は $y = \alpha$ の 2 点で接
するので、 y の 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c - y$$

$$-a\{(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2\} = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

は重解 $y = \alpha$ をもつ。したがって、 $\textcircled{3}$ の左辺は

$$-a(y - \alpha)^2$$

と表されるので $\textcircled{1}$ が得られる。 $\square$

命題 1 で求めた式 $\textcircled{1}$ を使って、次の入試問題を
解いてみよう。

問題 1. 放物線 $C: y = x^2$ と円 $A:$

$x^2 + (y - a)^2 = 4$ が異なる 2 点で接する。

(1) a の値を求めよ。

(2) 放物線 C と円 $B: x^2 + (y - b)^2 = r^2$

($r > 0$) が異なる 2 点で接し、更に円 A と円 B が
接するとき、 b と r の値を求めよ。

(07 中京大学)

(1) 放物線 C と円 A の接点の y 座標を c とすると、

$\textcircled{1}$ から円の方程式は

$$y = x^2 + (y - c)^2$$

と表される。これと

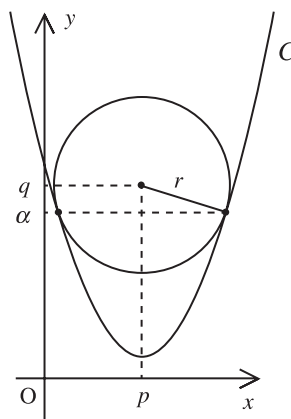
$$x^2 + (y - a)^2 = 4$$

が恒等的に等しい。 y の係数と定数項を比べて

$$-2c - 1 = -2a, \quad c^2 = a^2 - 4.$$

第 1 式より $a - c = \frac{1}{2}$. 第 2 式より $a^2 - c^2 = 4$

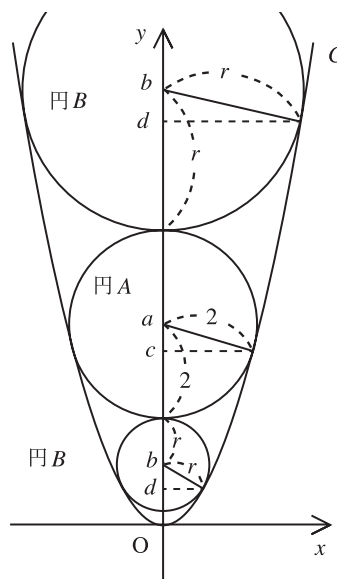
であるから $a + c = 8$ となって $a = \frac{17}{4}$.



(2) 放物線 C と円 B の接点の y 座標を d とすると

(1) と同様に $b - d = \frac{1}{2}$, $b + d = 2r^2$ より

$$b = \frac{1 + 4r^2}{4} \quad \dots \textcircled{4}$$



円Aと円Bは外接するので

$$|a-b|=2+r$$

(1), ④より

$$|4-r^2|=2+r, |2-r|=1, r=1, 3$$

$$\text{④より, } (b, r) = \left(\frac{5}{4}, 1\right), \left(\frac{37}{4}, 3\right)$$

2. 放物線と直線の交点を通る円の公式

次に、放物線と直線の交点を通る円の方程式を求める問題を考えてみよう。

一般に、放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と直線 $y = px + q$ の交点を通る曲線の方程式は

$$k(y - ax^2 - bx - c) + \ell(y - px - q) = 0 \quad \dots \text{⑤}$$

(k, ℓ は同時には0でない任意定数)と表される。しかし、この曲線は、放物線となり、円にはならない。そこで、⑤の式に y^2 の項をつくり、 x^2 と係数を揃えるために定数 ℓ を1次式に拡張し、次の公式を考えた。

命題2. 放物線 $C: y = ax^2 + bx + c$ と直線 $\ell: y = px + q$ の交点を通る円の方程式は

$$-a(px - y + q)(px + y + k) = 0$$

$$(p^2 + 1)(ax^2 + bx + c - y) \quad \dots \text{⑥}$$

(k は任意定数)と表される。

命題2の証明. ⑥は C と ℓ の交点を通る円の方程式である。また k が任意定数なので中心の y 座標も任意の実数となり、 C と ℓ の交点を通るすべての円を表す。□

特に⑥で、 $p=0, q=\alpha, k=-\alpha$ とすると①になる。

命題2で求めた式⑥を使って、次の問題を解いてみよう。

問題2. 直線 $y = x + 1$ と放物線 $y = x^2 - 2x$ の交点と点(1, 0)とを通る円の方程式を求めよ。

⑥を使った解答.

放物線 $y = x^2 - 2x$ と直線 $y = x + 1$ の交点を通る円の方程式は

$$2(x^2 - 2x - y) - (x - y + 1)(x + y + k) = 0$$

(k は任意定数)と表される。

点(1, 0)を通るので、

$$-2 - 2(1 + k) = 0 \quad \text{より} \quad k = -2$$

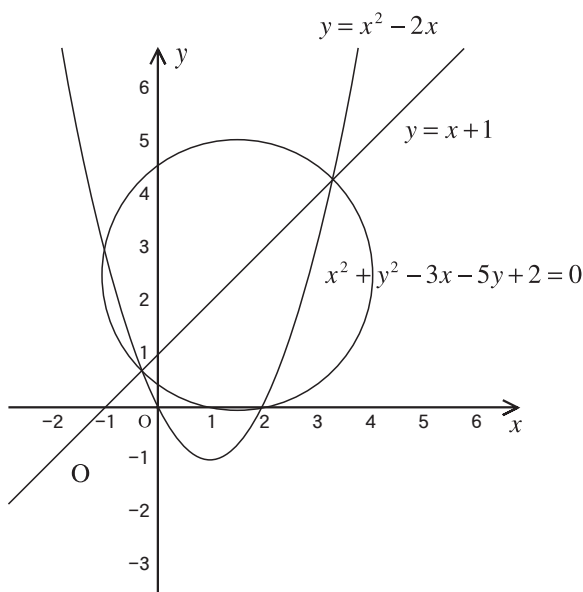
よって、求める円の方程式は

$$2(x^2 - 2x - y)$$

$$-(x - y + 1)(x + y - 2) = 0 \quad \text{から}$$

$$x^2 + y^2 - 3x - 5y + 2 = 0$$

となる。□



おわりに

これらの公式は、入試には直接使えないと感じつつ、生徒に紹介する。公式自体もだが、公式が得られた過程を大事にしたいと思っている。

文献、参考資料

- [1] 2次曲線の交点を通る曲線, じっきょう数学資料No.51, 2005年10月発行.
- [2] 入試問題集数学IⅡAB理系, 数研出版, 2007年, p.38, 128番.
- [3] 松田康雄, 放物線の中の円, 初等数学57号, 2007年9月発行, 95-97.