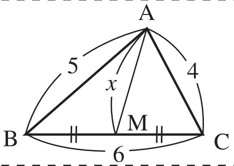
ワンポイント教材

三角形の中線の求め方

三角形の頂点から各辺の内分点に引いた線分の長さを求める方法はいくつかあるが，どの方法がよいか迷うところである。今回は中線の長さを例にとり，その長さを求める方法を考えてみたい。

［例題］右の三角形ABCにおいて，中線AMの長さxを求めよ。



解法１　中線定理を利用して

三角形の中線定理より

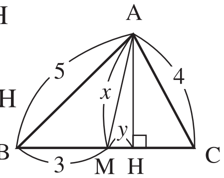
$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

$5^2+4^2=2(x^2+3^2)$より

$$x^2=\frac{23}{2} \qquad \therefore \quad x=\frac{\sqrt{46}}{2}$$

解法２　三平方の定理を利用して

Aから底辺BCに垂線AHを引く。MH$=y$とすると△ABH, △ACH, △AMHは直角三角形だから，三平方の定理より



$$5^2=AH^2+(3+y)^2 \quad \cdots①$$
$$4^2=AH^2+(3-y)^2 \quad \cdots②$$
$$x^2=AH^2+y^2 \quad \cdots③$$

①−②より

$$9=12y \quad \therefore \quad y=\frac{3}{4}$$

②に代入して

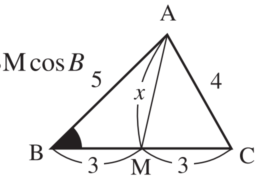
$$16=AH^2+\left(3-\frac{3}{4}\right)^2 \quad より \quad AH^2=\frac{175}{16}$$

③に代入して

$$x^2=\frac{175}{16}+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{46}{4} \quad \therefore \quad x=\frac{\sqrt{46}}{2}$$

この解法は，中線定理を導く方法と同じである。

解法３　余弦定理を利用して（その１）



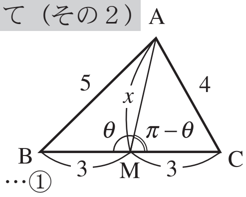
$$\cos B=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6}=\frac{3}{4}$$

$$x^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cos B$$

$$=5^2 4^2-2\cdot5\cdot4\cdot\frac{3}{4}$$

$$=\frac{23}{2} \qquad \therefore \quad x=\frac{\sqrt{46}}{2}$$

解法４　余弦定理を利用して（その２）



$\angle AMB=\theta$とすると

△ABMと△ACMに

余弦定理を適用して

$$5^2=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cos\theta \quad \cdots①$$

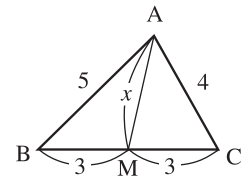
$$4^2=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cos(\pi-\theta) \quad \cdots②$$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$　だから

①＋②より

$$2x^2=23 \qquad \therefore \quad x=\frac{\sqrt{46}}{2}$$

解法５　ベクトルを利用して



$$\cos A=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\frac{1}{8}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

$$|\overrightarrow{AM}|^2=\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(5^2+2\cdot5\cdot4\cdot\frac{1}{8}+4^2\right)$$

$$=\frac{23}{2}$$

$$\therefore \quad |\overrightarrow{AM}|=x=\frac{\sqrt{46}}{2}$$

これらの解法から，中線を求めるだけなら中線定理を利用する方がよい。しかし，応用範囲を考えると，どの場合にどの解法がよいかはそう簡単にはいえない。大切なことは，実際に生徒に解かせ，それぞれのよさを実感させることであり，それが後々実力に結びつくのだと思う。

通巻第55号
2007年 10月 1日　印刷
2007年 10月 5日　発行
©編修・発行　実教出版株式会社
代表者　島根正幸
定価　210円（本体200円）
発行所　〒102-8377　東京都千代田区五番町５
TEL. 03-3238-7777
http://www.jikkyo.co.jp/