

直角三角形の辺の等分

—三角関数の図形への対応—

直角三角形の辺を等分することに関する問題については、三角関数を応用すると簡単に解ける場合が多い。

特に今回は、大学入試問題の中から、その結果が数学的にきれいなものであると思われるものについて、いくつか取り上げてみようと思う。

〔例題 1〕 $\angle C$ が直角、 $AC=1$ 、 $BC=3$ の直角三角形 ABC において、辺 BC の 3 等分点を P 、 Q とし、 $\angle ABC=\theta_1$ 、 $\angle APC=\theta_2$ 、 $\angle AQC=\theta_3$ とするとき、 $\theta_1+\theta_2+\theta_3$ の値を求めよ。

＜解＞ 与えられた条件から、

$$\tan \theta_3 = 1 \text{ より } \theta_3 = 45^\circ$$

$$\text{一方 } \tan \theta_1 = \frac{1}{3},$$

$$\tan \theta_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{より } \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \times \tan \theta_2} = 1$$

$$\text{よって } \theta_1 + \theta_2 = 45^\circ$$

$$\text{したがって } \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 90^\circ \quad \text{＜終＞}$$

上の例題 1 においては、 $\theta_1 + \theta_2 = \theta_3$ となることが注目される。

なお、この例題は、早稲田大学で出題された次の問題を、図形的に表現してみたものである。

〔参考〕 $\tan \theta_1 = 1$ 、 $\tan \theta_2 = \frac{1}{2}$ 、 $\tan \theta_3 = \frac{1}{3}$ のとき、 $\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ の値を求めよ。('05 早稲田大)

次の問題も、その結果がきれいだである。

〔例題 2〕 $\angle B$ が直角の直角三角形 ABC において、斜辺 AC の 3 等分点を P 、 Q とし、 $BP=3$ 、 $BQ=4$ 、とするとき、

(1) PQ の長さを求めよ。

(2) $\angle PBQ = 2\angle QBC$ であることを示せ。

('06 帝京大改題)

＜解＞ (1) $AB=a$ 、 $\angle BAC=\theta$ 、 $PQ=x$ とおくと、 $\cos \theta = \frac{a}{3x}$

それで、 $\triangle APB$ に余弦定理を適用すると、

$$3^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos \theta$$

$$\text{よって } a^2 + 3x^2 = 27 \quad \cdots \text{①}$$

同様に、 $\triangle AQB$ に余弦定理を適用して、

$$4^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos \theta \quad \cdots \text{②}$$

$$\text{①、②から } a = 2\sqrt{3}, PQ = x = \sqrt{5}$$

(2) $\angle PBQ = \alpha$ 、 $\angle QBC = \beta$ として、

$\triangle PQB$ に余弦定理を適用すると、

$$(\sqrt{5})^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$\text{よって } \cos \alpha = \frac{5}{6}$$

一方、 $AB=2\sqrt{3}$ 、 $AC=3\sqrt{5}$ より $BC=\sqrt{33}$ であることから、

$$\triangle QCB \text{ に余弦定理を適用すれば } \cos \beta = \frac{\sqrt{33}}{6}$$

$$\text{ゆえに } \cos 2\beta = 2\cos^2 \beta - 1 = \frac{5}{6}$$

$$\text{したがって } \alpha = 2\beta$$

$$\text{すなわち } \angle PBQ = 2\angle QBC \quad \text{＜終＞}$$

$\triangle PQB$ の 3 辺が 3、4、 $\sqrt{5}$ となることや $\angle PBQ = 2\angle QBC$ となることは注目される。

なお、これら図形の問題を解くにあたっては、三角関数の知識を活用すると容易にできる場合が多い。

レギオモンタヌス (Regiomontanus) が 1471 年に、「高い建物の窓を見るには、どの位置が最も好ましいか (視角が最大となるのはどこか)」を考えたと言われている問題を、以下に簡略化して示しておく。三角関数を利用する練習問題として、生徒に考えさせたい。

〔問題〕 右図の直角三角形

ABC において、辺 AC 上に

点 P をとり、 $AC=a$ 、

$PC=b$ とするとき、 B

$\angle ABP$ が最大となるときの

BC の長さを a 、 b で表せ。

(答) $\sqrt{ab}$

