

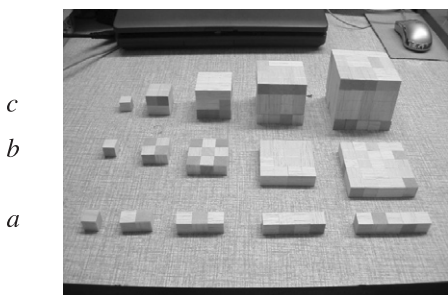
平方数・立方数の和の指導

筑波大学附属駒場中学・高等学校 町田多加志

平方数の和 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum k^2$ や
立方数の和 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum k^3$ を指導
するときに、例えば、平方数の和では k につい
ての等式 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ に k の値と
して $1, 2, 3, \dots, n$ を代入して行って公式を導い
ていたが、生徒がなかなか楽しめていない実情を
考えると、まず、公式の美しさを見せることが大
事ではないかと考えられる。そこで、この指導後
に証明を必要とするが、次のような授業を実践し
てみた。

木の積み木（立方体）を、横のみの1方向(a)、
横と縦の二方向(b)、横と縦と垂直の三方向(c)
に重ねた3種類のブロックを作り、それぞれのブ
ロックで n 段まで積み重ねるために必要な積み木
の個数を n で表してみるよう課題を提示した。

下から一方向(a)、二方向(b)、三方向(c)



5段まで積み重ねた模型



a



b



c

n 段までに必要な個数はそれぞれ

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$b_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

$$c_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

であるが、具体的な数値を表にすると、

段	1	2	3	4	5	6	7
a	1	1+2 3	3+3 6	6+4 10	10+5 15	15+6 21	21+7 28
b	1 ² 1	1+2 ² 5	5+3 ² 14	14+4 ² 30	30+5 ² 55	55+6 ² 91	91+7 ² 140
c	1 ³ 1	1+2 ³ 9	9+3 ³ 36	36+4 ³ 100	100+5 ³ 225	225+6 ³ 441	441+7 ³ 784

上の表をかくことで a と c の関係 “ c は a の2乗”
はすぐに見つけられた。

また、 a の式 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

については、実際この積み木を図示することで気
付く生徒が出てくる。

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^n k$$

よって、(c の式) = (a の式の2乗) より

$$c_n = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = \sum_{k=1}^n k^3$$

さらに比較してみるために比をとると

$$a_n : c_n = 1 : a_n$$

が出てくるので

$$c_n = (a_n)^2$$

が、確認できるとともに a と b の関係を考えてい
た生徒にとっては一つのヒントとなる。つまり、
同様に、 a と b を比較するために比をとると

$a:b$

$$1:1 = 1:\frac{3}{3},$$

$$3:5 = 1:\frac{5}{3},$$

$$6:14 = 1:\frac{14}{6}, = 1:\frac{7}{3},$$

$$10:30 = 1:3 = 1:\frac{9}{3},$$

$$15:55 = 1:\frac{55}{15} = 1:\frac{11}{3},$$

$$21:91 = 1:\frac{91}{21} = 1:\frac{13}{3},$$

$$28:140 = 1:5 = 1:\frac{15}{3},$$

以上より

$$a_n:b_n = 1:\frac{2n+1}{3} \text{ となる。}$$

この a と b の関係を見つけ出したときの生徒の「アッ」という反応はとてもよい。したがって

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \times \frac{2n+1}{3} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{2n+1}{3} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{k=1}^n k^2 \end{aligned}$$

が求められる。

さらに、積み木でできるブロックのかたちを三角形にして積み重ねる場合の個数（三角数の和）を応用問題として考えさせてみる。式は

$$1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\cdots+(1+2+\cdots+n)$$

となり、 $\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2}$ のこととなるが、これを d とし

て、 b や c と同様に a と比較してみると

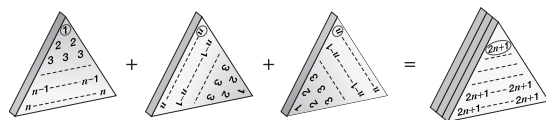
$$a_n:d_n = 1:\frac{n+2}{3}$$

という関係がみつかり

$$d_n = a_n \times \frac{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

が出てくる。これはよく $\sum_{k=1}^n k^2$ で生徒が間違える式である。このようにそれぞれの式に違う意味があることを公式を導く際に示すことで間違えることも減るであろう。

また、これ以外の $\sum_{k=1}^n k^2$ の導き方として、図を用いる方法も有効である。



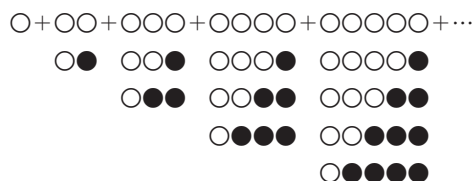
(新高校数学教科書「数学B」より)

上の図は3つの三角形の各位置の数の合計がすべて $2n+1$ で、全部で $(1+2+3+\cdots+n)$ 個あるから

$$(2n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

と導いている。

また「三角数」の公式 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ を先に学習すると、これを次の図に利用して $\sum_{k=1}^n k^2$ の公式を導くこともできる。



上の図より

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

$$=(\text{○の三角数})+(\text{●の三角数})$$

$$=(n \text{ までの三角数})+(n-1 \text{ までの三角数})$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

このように、公式の美しさやいろいろな考え方を体験するような「数学的活動」として、

$$\sum_{k=1}^n k, \sum_{k=1}^n k^2, \sum_{k=1}^n k^3, \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2}$$

を試みてきた。