ワンポイント教材

定積分と面積

－定積分の計算の一考察－

一般に，定積分の計算には分数が多くめんどうであるが，定積分を面積と関連づけて考えると，簡単に計算できる場合がある。

ここでは，曲線と x 軸とで囲まれた図形の面積は，曲線を x 軸方向に平行移動しても変わらないことを利用して，定積分の計算を考えてみよう。

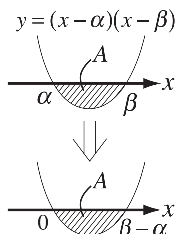
（例題 1） $\int_0^{\alpha} x(x-\alpha)dx=-\dfrac{\alpha^3}{6}$ であることを確認し、この結果を用いて，

$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}$ であることを証明せよ。ただし，$\alpha\leqq\beta$

＜解＞ $\int_0^{\alpha} x(x-\alpha)dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{\alpha x^2}{2}\right]_0^{\alpha}=-\frac{\alpha^3}{6}$$

それで，$S=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$ とおくと，$-S$ は放物線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)$ と x 軸とで囲まれた図形 A の面積 である。



ここで，放物線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)$ を x 軸方向に $-\alpha$ だけ平行移動しても図形 A の面積は変わらないから，

$$S=\int_0^{\beta-\alpha} x\{x-(\beta-\alpha)\}dx=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

同様に，曲線を x 軸方向に平行移動することを考えて，次の定積分を計算してみよう。

（例題 2） $\int_0^{\alpha} x^2(x-\alpha)dx=-\dfrac{\alpha^4}{12}$ であることを確認し，この結果を用いて，次の定積分を計算せよ。

(1) $\int_0^{\alpha} x(x-\alpha)(x-\beta)dx$

(2) $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx$ ただし，$\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$

＜解＞ $\int_0^{\alpha} x^2(x-\alpha)dx$

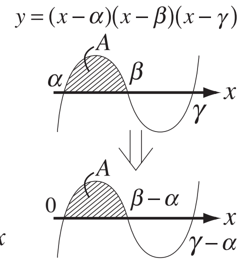
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{\alpha x^3}{3}\right]_0^{\alpha}=-\frac{\alpha^4}{12}$$

(1) $\int_0^{\alpha} x(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$$=\int_0^{\alpha} x^2(x-\alpha)dx-\beta\int_0^{\alpha} x(x-\alpha)dx$$

$$=-\frac{\alpha^4}{12}+\frac{\alpha^3\beta}{6}=\frac{\alpha^3(2\beta-\alpha)}{12}$$

(2) $S=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx$ とおくと，これは $\alpha\leqq x\leqq\beta$ における曲線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ と x 軸とで囲まれた図形 A の面積である。



ここで，$y=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ を x 軸方向に $-\alpha$ だけ平行移動しても図形 A の面積は変わらないから，

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx$$

$$=\int_0^{\beta-\alpha} x\{x-(\beta-\alpha)\}\{x-(\gamma-\alpha)\}dx$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3(2(\gamma-\alpha)-(\beta-\alpha))}{12}$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3(2\gamma-\beta-\alpha)}{12}$$

なお，これらの定積分の計算方法は，

定積分 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

の下端 α と上端 β が方程式 $f(x)=0$ の解であることに注意して頂きたい。

x 軸に限らず，直線と曲線で囲まれた図形の面積の計算でも，これらの計算方法は有用である。

最後に練習問題をあげておく。生徒に考えさせてみたい。

＜練習＞ $f(x)=x^3-6x^2+9x$ とする。
曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=mx$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように m の値を定めよ。

（答） $m=1$

通巻第53号
2006年 11月 15日 印刷
2006年 11月 15日 発行
©編修·発行 実数出版株式会社
代表者 島根正幸
定価 210円（本体200円）
発行所 〒102-8377 東京都千代田区五番町 5
TEL. 03-3238-7777
http://www.jikkyo.co.jp/