実 践 記 録

直感でわかる三角関数のグラフの作り方

── 弧度法の導入も考慮して ──

富山県立富山いずみ高等学校　川西嘉之

Ⅰ．はじめに

ある学年の補欠授業に出たとき，生徒たちから「三角関数のグラフ（サイン，コサインのグラフ）が頭になかなか入っていかない。教科書に書いてあるのはわかるが，すぐには思い出せない。もっとわかりやすい覚え方はないか」などの質問が出た。そのとき，自分だったらどう説明するかいくつか考えてみたが，きっと教科書に書いてある方法を説明するしかないのかなと思った。しかし，生徒たちは一体「何が，どこがわからないのか」と思い，三角比や三角関数の基本的事項を質問してみた。すると生徒たちはそれらをよく知っていたのだが，どうも三角比の値とグラフの形がうまく結びつかないらしい。それはなぜかを考えてみると，グラフのx座標（角度を表す横軸）に関することやグラフの原点と単位円の原点との位置関係等に問題があるのではないかと思った。そして以下に述べる方法を思いつき，すぐに職員室に行き，ひも，色紙，セロテープ等を持ってきて思いついたままを授業してみた。

Ⅱ．前提

生徒は次のことは理解しているとする。単位円周上の点$P(x,\ y)$に対して，$y=\sin\theta$，$x=\cos\theta$であること。また，θの代表的な値（$\theta=0°$，30°，45°，60°，90°，120°，135°，150°，180°等）については，それらの$\sin\theta$，$\cos\theta$の値は知っている。

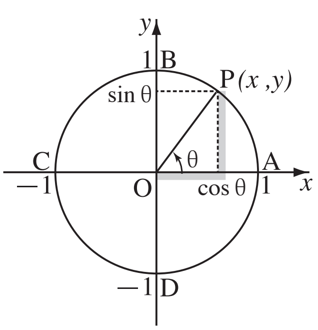


図１

Ⅲ．$y=\sin\theta$ のグラフについて
（$0°\leqq\theta\leqq 360°$ とする。）

1．従来の書き方

（ア）角度とサインの値をもとに点をプロットしていく。

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

（イ）単位円を利用してサインの値になっている長さ（高さ）をプロットしていく。

角度（°）を用いた書き方の問題点としては，横軸の角度の目盛りと長さの関係（横軸の1°は長さとして，いくらにすればよいか）が不明確である。これについては，弧度法を導入して，360°を２πに決めているが，弧度法自身が生徒に十分納得のいく形では受け入れられていない。（弧度法については，グラフを書いた後，単元の最後のほうで指導することになっている教科書もある。）

２．私のサインのグラフの作り方

準備するもの：厚紙等に書いてある単位円，２πの長さがあるひも，セロテープ，長さがサインの値になっている矩形の棒で，サインの値が正なら赤色の棒，負の値なら青色の棒

（ア）単位円の周上に角度をつけておく。（代表的

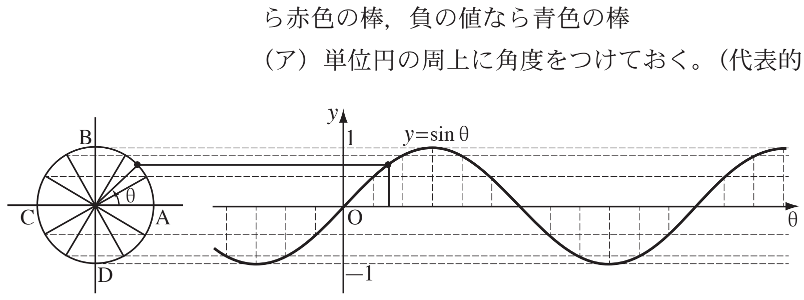
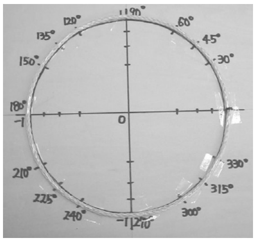


図２

な角度として，30°，45°，60°・・・等）

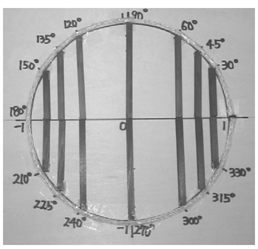


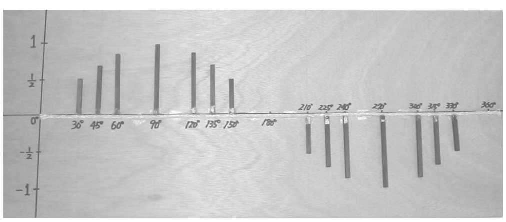
（イ）この円周にひもを巻き付ける。ひもにも代表的な角度を記入するか印をつけておく。（ひもに目盛りをふっておく。）

（ウ）ひもに，サインの値を長さにした色のついた矩形をつける。（糸を用いて，紙の矩形をひもに括り付けるとよい。）

（エ）円周上に巻き付けられたひもを取り外し，一直線にのばす。ひもの端（$\theta = 0°$ のところ）を原点にして，ひもで角度の横軸を作る。（ひもに目盛りがついていることになる。）

（オ）ひもとひもについている紙の矩形を，黒板やグラフ用紙にセロテープで留める。赤のものは横軸の上側に，青色のものは横軸の下側にする。

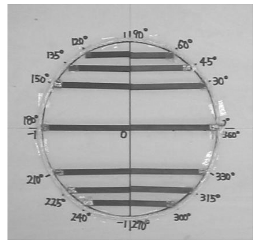


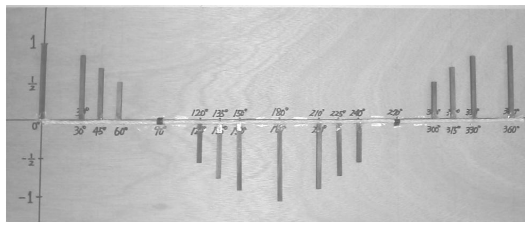


この結果，サインを表す棒グラフが完成している。（このとき 360° のところの長さは 2 π になっていることに気がつく。）

Ⅳ. $y = \cos\theta$ のグラフについて
（0° ≦ θ ≦ 360° とする。）

次図のように，ひもにコサインの値を表す赤か青の矩形を付ける。（コサインの値が正のときは赤の矩形，負の値のときは青の矩形）$\theta = 0°$ であるひもの端を原点としてひもを一直線に伸ばし，グラフを作る。

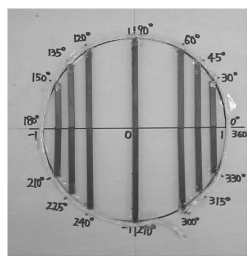


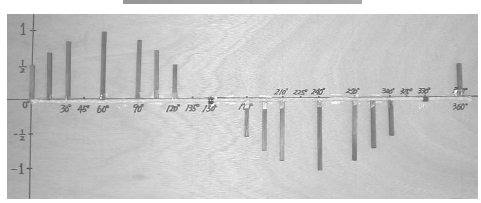


Ⅴ. $y = \sin(\theta + 30°)$ や $y = \sin(\theta - 60°)$ のグラフについて（0° ≦ θ ≦ 360° とする。）

（1）$y = \sin(\theta + 30°)$ について

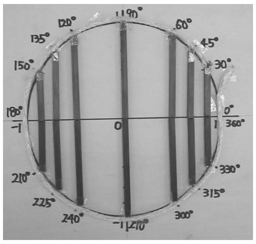
ひもを全体的に 30° 分反時計回りの方に回転してずらし，ひもの端（$\theta = 0°$）を単位円の 30° のところから 1 周分巻き付ける。あとはひもにサインの値がわかる紙を付ける。そのあと，ひもの端を原点にし，紙の付いたひもを一直線に伸ばすとグラフができる。

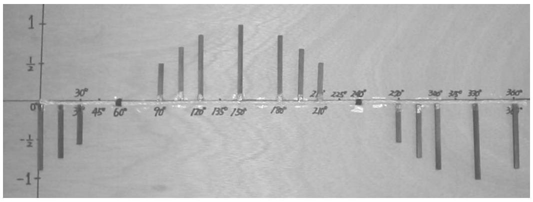




（2）$y = \sin(\theta - 60°)$ について（上記と同様）

ひもの端（$\theta = 0°$）を，単位円の 60° のところにおき，ひもを 1 周分巻き付け，紙の付いたグラフを作る。



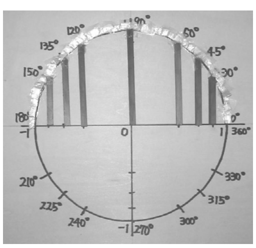


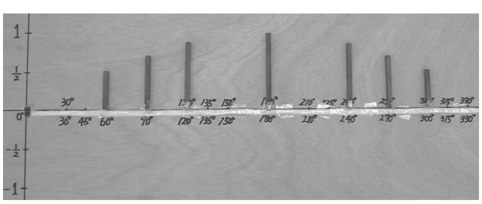
Ⅵ. $y=\sin(a\theta+b)$ のグラフについて
（0° ≦ θ ≦ 360° とする。）

円運動において，円周上を位相角 b，角速度 a（角度のスピード）で回転する物体があるとき，その y 座標の値は$y=\sin(a\theta+b)$で表される。私はこれをイメージして，このタイプのグラフを指導している。

（1）$y=\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ のグラフについて
（0° ≦ θ ≦ 360° とする。）

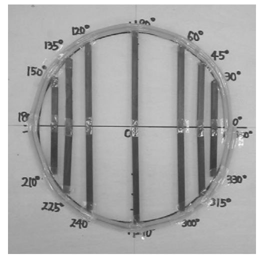
$0°\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq 180°$ になることより，「$\dfrac{\theta}{2}$ は角度の回転のスピードが普通より半分遅い」ので，ひもの長さを半分に縮めて単位円に巻き付け，サインの値の矩形の紙をつけ，もとの長さにもどして，ひもの端を原点として，ひもを一直線に伸ばし，グラフを作る。

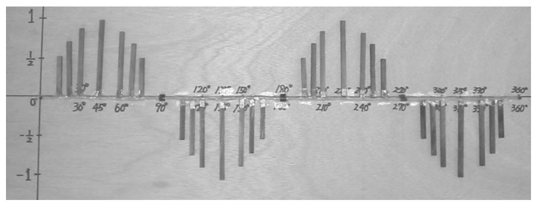




（2）$y=\sin(2\theta)$ のグラフについて
（0° ≦ θ ≦ 360° とする。）

$0°\leqq 2\theta\leqq 720°$ になることより，「2θ は角度の回転のスピードが普通より2倍速い」ので，ひも（ゴムひも）をひっぱり，2倍の長さに伸ばして単位円に巻き付ける。（ゴムひもは2周巻き付けられる）そのあと，サインの値の矩形の紙をつけ，もとの長さ（360°分の長さ）にもどして，ひもの端を原点として，ひもを一直線に伸ばし，グラフを作る。





Ⅶ. 最後に

生徒の感想をいくつか上げると，「sin と cos のグラフについては，道具を使っての説明がとてもわかりやすく，とても印象に残った」，「sinθ と cosθ の円とひもを使ってグラフを説明されたのには，とても驚きました」，「わからないところがわかるようになるというのが数学の1つの楽しさなんだと思いました。一番印象に残っているのは，sin と cos のグラフの説明です。あの説明は本当にわかりやすかったです」などでした。

私のサインのグラフの書き方のヒント

円柱を底面に平行でない平面で切断したとき，その断面は楕円になる。この楕円を含んだ円形の立体を底面に垂直に切り開くと，サインのグラフが表れる。これは円周が，角度の横軸になっていることを示している。