

黄金比の数理的造形

フィボナッチ・タワー（１）

日詰明男

私が「黄金比」に取り組み始めたのは、かれこれ 23 年ほど前、建築の学生の頃だった。以来、建築をはじめ、彫刻、平面造形、音楽にいたるまで、空間次元を問わず、黄金比の機能を最大限に引き出すべく、作品を作り続けている。

今回は、その中の小品、「フィボナッチ・タワー」（別名「ひまわりの塔」）を中心にお話ししよう。

●黄金比はエンギモノか？

その前にいわゆる「黄金比」について一言。

今や、流行の映画や小説にフィボナッチ数列や黄金比が登場してくるほど、それは一見ポピュラーである。だが、「黄金比」が本当に理解されて浸透しているかというと、はなはだ怪しいものである。「パルテノンやピラミッドに黄金比が使われている」「オウム貝は黄金分割螺旋」「モナリザなどの名画における黄金比」「黄金矩形がもっとも美しい」「DNA にも黄金比が！」などなど、まことしやかに語られているが、それらはすべて迷信の域を出ず、私に言わせれば「だから何なんだ」というほどのものである。この類の俗説はきわめて恣意的で、限りなくデータ捏造に近い。

にもかかわらず、知性溢れるように見える人であればあるほど、これを鵜呑みにしがちなのはどういうわけだろう。私はうんざりするほどそうした人々や書物を見てきた。実際にオウム貝と黄金分割螺旋を重ね合わせて検証した人がどれだけいるのだろう？ 皆確かめもしないで黄金分割螺旋とオウム貝を抱き合わせで神秘化している。これではまるでオウム貝真理教である。私にはどちらも対数螺旋である以上の共通点は見出せないのだが。

「何かが黄金比である」ことを示す際には、同

時にそれがどのような工学的機能を持っているのかははっきり明示してもらいたいものだ。ただ「美しいから」では話にならない。迷信に流されないために工学的センスは不可欠である。

以上のトンデモ学説、トリビア学説とは一線を画したところに、実は黄金比の驚くべき機能が存在する。

●ひまわりのたね

私は、東川和夫氏の論考「ひまわりのたね」（数学セミナー 1983）で黄金比の疑いようのない工学的機能を知った。

その論文では、 τ を黄金比 $\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ として、放物渦線 $r^2 = a\theta$ 上に $\theta = 2n\pi(\tau - 1)$, $n = 1, 2, 3 \dots$ というように種を逐次プロットすることによって、ひまわりの種のパターンが見事に再現されていた。氏はさらにその原理を球面にも適用されていた。

そして東川氏は、ひまわりの種に順序数をふり、「目が辿ってしまう螺旋はすべてフィボナッチ数を法として合同な螺旋である」ことを明快に説明していた。

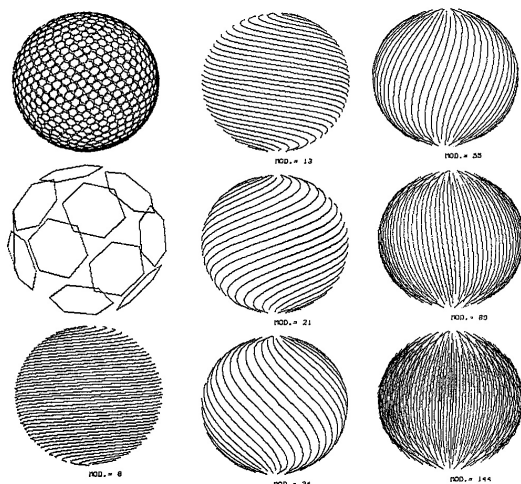


図 1 球面フィボナッチ葉序

私は1983年当時、BASIC言語で走るポケットコンピュータで東川氏の仕事を追試し、いろいろな発展を試みたものである。

例えば図1は東川氏の球面ひまわりを追試した上で、各フィボナッチ数を法として合同な曲線を辿らせた試みである。mod 89はタマネギに見える。図2は、mod 1, mod 2の曲線を重ねたもので、これはマツカサそっくりであろう。寄り目で見ると立体視できる。

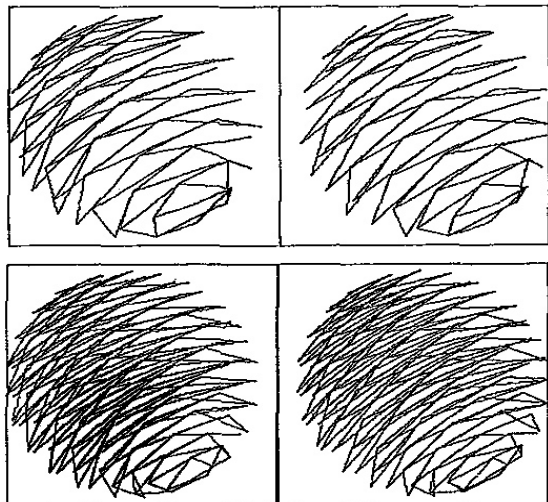


図2 mod 1とmod 2を結ぶ

●迷信ではないフィボナッチ葉序

良く知られているように、ひまわりやマツカサ、パインアップル、そして路傍の草木の多くが上記のような黄金比に基づく「フィボナッチ葉序」を



図3 ダイコン葉の断面

採用している。身近なところで、ダイコンの葉の根元を包丁で切り落とした時の断面などは実にきれいなものである。(図3)

植物がそれを多用する工学的意味は何か？

かつて原始的な植物は、たとえば地衣類のように大地にへばりつき、ひたすら平面的な増殖をめざしていた。それに限界を感じた植物は進化のある時点で、垂直軸への増殖、すなわち平屋建てから3次元的な高層化を図るようになった。このへんの事情は、人口過密ゆえに高層化へと向かわざるをえなかった私たちの都市と同様である。高層化に際しての条件は、まずバランス良く大地に立ち、構造的に安定していなければならない。なおかつ上部階の葉が下部階の葉にできるだけ影を落とさないようにしなければならない。

「フィボナッチ葉序」では、どの葉も平等に満遍なく光を受けられる最善の解となっており、まさに民主主義の鑑ともいえる構造である。植物は数千万年前から、このような実践を積み重ね、繁栄してきたわけである。

人類が黄金比をエンギモノ程度にしか扱っていなかったことに比べれば、まさに月とスッポンである。

●最もシンプルな連分数展開

黄金比は $x = 1 + \frac{1}{x}$ という形のシンプルな自己言及型方程式(二次方程式)の解である。周知のとおり、ここから展開される連分数では部分分母も分子も1のみで構成される。

任意の実数に対しても展開できるこの方法は、ユークリッドの互除法とも呼ばれ、矩形正方形分割として視覚化することができる。図4は $\frac{157}{225}$ の場合である。

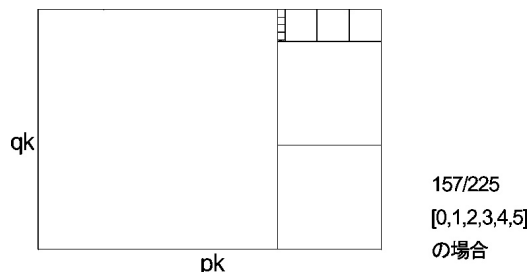


図4 ユークリッドの互除法と連分数展開

余談だが、私がこの連分数と矩形分割で表現されるユークリッドの互除法を知ったのは大学生になってからの事であり、どうして中学生の段階、即ち、根号が導入される前に学校は教えてくれなかったのかと、ずいぶん文部省教育（当時）を恨んだものだ。

無限の再帰的操作によって無理数へ接続するという気の遠くなる経験をした上で、いわば無限をモジュール化した「根号」が道具として導入されるならば、二次方程式の理解は比喩ものにならないほど深まることだろう。

そしてこの連分数構造は、いろいろな幾何学的な解釈をすることができ、フラクタル幾何学さえ見据えている。

数学の恐るべき深さ、美しさを中学レベルの道具立てで十分に経験でき、子供はそれを使って自由に数学の世界を探検し始める事だろう。なにが悲しゅうてこんな好機をみすみす見逃すことがあろう？

一事が万事、現代の数学教育は数学的思考を単なる記号の形式的操作へと貶めているように思えてならない。ここにも工学的視点の欠落を見ることができ。多くの学生が数学に根強い不毛感を抱いている原因の急所がここにあると思う。

数学が形式システムに還元できず、絶えず超数学的な直観に支えられて成熟すべきものであることをゲーデルが証明したのは周知のとおりである。

さて、話を戻すと、実数の連分数展開はその近似分数を算出する。

特に黄金比の場合、その連分数の構造（図5）から明らかなように、良く近似する分数（これがいわゆるフィボナッチ数列の項比になるわけだが）が見つかって、それほど分母は大きくならないうちにもっと良い近似分数がすぐに見つかる

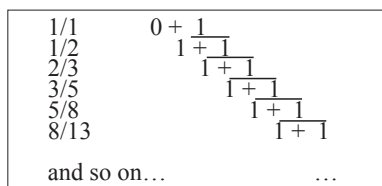


図5 黄金比の連分数展開と近似分数

ことを意味する。

つまり「黄金比は有理数でもっとも近似に近い二次の無理数」と特徴づけることができる。これこそ黄金比の核心である。

フィボナッチ葉序によって植物が受け取る諸々の恩恵は、すべてその直接の帰結といってよい。工学者にとって、この性質の持つポテンシャルは計り知れない。

たとえばこれを音響的に解釈すると、黄金比は最高の不協和音であることを含意している。実際私はこの着想から、新しい音楽理論を体系化したのが、これだけでも一巻の物語で、とてもここに書ききれものではない。

要するに黄金比とは「最も高い攪拌効率を有し、最もシンプルなフラクタル構造である」というのが私の理解である。

当然、建築の学生だった私はこの原理を建築へと発展させようとした。フィボナッチ葉序を建築に応用すると、耐震的にも安定し、換気と採光に優れた高層住宅が設計できる。スタジアムなどの観客席に応用すれば、前に座る人の大きな頭がじゃまにならないものになるだろう。

私はまず東川氏の前掲論文から進んで、円錐面やベルトラミの擬球面に葉序原理を応用して「ひまわりの塔」を設計した（図6）。（この項続く）

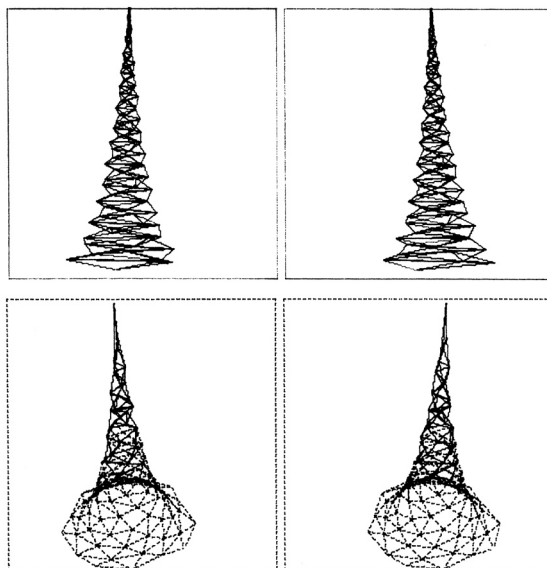


図6 ひまわりの塔（1986） 寄り目で見ると立体視できる