じっきょう
数学資料 No. 53

数学とその応用はどこが違うのか

東京大学大学院情報理工学系研究科教授　杉原厚吉

数年前に村上龍が編集した「13 歳のハローワーク」（幻冬舎）という本が話題となった。これは，何が好きかを入り口として，その好きなことを生かそうとしたらどのような職業があるかを紹介したものである。たとえば，運動が好きな人に向いた職業はとか，動物が好きな人に向いた職業はとかいう具合である。このように若者に多様な職業の可能性を示すことは有益だとして，この本は好意的に評価された。

しかし，この本を手にとって数学が好きな人に向いた職業の欄を見たとき，その貧弱さに私はあきれてしまった。なぜなら，そこには金融関係の職業と暗号作製者しか載っていなかったからである。

数学は工学のほとんどあらゆる分野で，重要な道具として使われている。したがって，数学が好きな若者が好きな数学を生かしながら活躍できる職業はたくさんある。しかし，そのことは，この本には紹介されていなかった。どうもこれが，数学に対する世の中一般の認識らしい。

これと同じ傾向は，学生と話をしていても感じることがある。数学は好きだったけれど，数学者や数学教師になる気持ちはなかったので，数学の勉強はやめたなどと言う学生が時々いる。そんなときには，おいちょっと待て，好きな数学を生かせる場面はほかにもたくさんあるよと言いたくなる。

私の専門は「数理工学」である。数理工学とは，工学の諸問題を数学を用いて解くための方法論である。そして，この方法論を必要とする分野はたくさんある。実際，私の研究室だけをとっても，画像認識，コンピュータグラフィックス，形状デザイン，物理シミュレーション，パッキング，経路最適化，マーケティング，地理情報処理，スポーツ科学と多彩であるが，どれも数学なしでは進められない。このように数学が必要とされる分野はたくさんあるから，「数学」を職業にしなくても数学は必要であり，数学が好きだったら，それを捨てるなどというのはもったいないことこの上ない。

生徒が中学や高校でたくさん数学を習っても，

もくじ

それが社会へ出てから何の役に立つのかのイメージがもてないのは，教える側が，数学は知っていても，数学が社会でどのように使われているかを知らないので，そういうことを生徒に伝えられないからであろう。

日本の中学校・高校の数学の先生は，数学を学んでさらにその上に教員免許をとった人がなる。でも，数学が産業の現場でどのように使われているかを体験するなどということは教員になるための条件には入っていない。だから，そういうことを知らない人が先生になるというのが一般的な姿であろう。だから知らない。だから教えられない。だから生徒も，今教わっている数学が，社会に出てから何の役に立つのかのイメージがもちにくいということだと思う。

数学の教科書には，応用を題材にした話題も載っている。ただ，応用とは言っても，折り紙の性質とかつるかめ算とか，抽象的な数学を具体的イメージに当てはめるという意味の応用であって，それは，産業現場の人から見ると「遊び」でしかない。本当の応用とはそんなもんじゃないというのが，現場の感覚であろう。

とは言うものの，かく言う私自身も産業の現場にいるわけではない。私たちは大学の工学部に所属しているが，ただ工学部にいるだけでは，産業の現場で何が課題であって，どんな数学が求められているかはわからない。それがわかるためには，自分からその気になって大学の外へ出て，産業現場を見せてもらったり，そこの人たちと交流したりしなければならない。さもないと，応用っぽい姿をした問題を勝手に作って，それを解いて自己満足に陥るということになりかねない。私たちの職場は，そういう危険を常にもっている。

では，産業の現場で求められている数学とはどういうものなのかと問われれば，新製品の性能シミュレーションのためには微分方程式の解法であるとか，新車の形のデザインのためには曲面の理論であるとか項目を並べることはいくらでもできる。でも，産業現場の数学の本当の姿というのは，そういう項目の列挙では表せない何かだと思う。それは，学校で教わる数学とは質的に違うものである。というより，使う数学は同じものなのだが，使い方が根本的に違うように思う。このことについて，例を使って少し詳しく述べてみたい。

某民放テレビ局の「トリビアの泉」という番組の制作担当者から，サイコロの各目の出る確率を計算してほしいという依頼を受けたことがある。サイコロの目の出る確率は，きれいごとのレベルではみな６分の１である。しかし，サイコロの面には，目の数だけの穴が掘ってあるので，面によって削り取られる材料の量が異なる。そのために，重心がずれる。だから，目の出る確率は同じではない。重心がどれだけずれているかは，精密測定を得意とするある町工場で測定してわかっているから，それをもとに目の出る確率を計算してほしいというのが依頼の内容であった。しかも，放映スケジュールから逆算して２，３日で知りたいということであった。

なぜ私に相談したかというと，物理シミュレーションなどの研究もしていると聞いたからだとのことだった。もともと，その番組担当者は，最初は確率の専門家へ相談したらしい。そうしたら，確率理論では，それぞれの目の出る確率が与えられたらいろいろな議論はできるけれど，その確率を求めること自身は確率理論がカバーする範囲ではないと言って断られたそうだ。

こんな例をあげると，何だテレビ番組なんて遊びのレベルじゃないか，ちっとも産業の現場じゃないじゃないか，とお叱りを受けそうである。しかし，そうではない。まともに数学を使って解こうとしても解けそうにないこと，締切に追われていること，要するに無理難題であることなど，産業現場で生じる問題の性質をしっかりもっている。しかも，サイコロというのは馴染みの深いものだから，背景事情についていろいろ説明をする必要がなく，すぐに本題に入れるという意味で，私がこれからいいたいことを示すのに適した例だと思う。だから，もう少しお付き合いいただきたい。

さて，物理シミュレーションの専門家だと言われて，その方向でこの確率を計算しようとすると

とんでもないことになる。サイコロを振ったときの動きはとても複雑である。運動方程式，机の面との衝突，空気抵抗，摩擦，そもそもサイコロを放り投げるときの初速を決める手の振り方，指での持ち方など，気が遠くなるほど考えるべき要素がある。それをシミュレートできるプログラムを作って信頼のおける確率を得るまで計算を繰り返すなどということは，２，３日でできるものではない。１年かけても難しいであろう。良心的な数学者なら，できませんと答えるのは当然のことである。

でも，工学の人間にとって，そう答えることは良心ではない。工学の良心とは，実際に解決することが求められている問題に対しては，期待に応えて何とかそれなりの答えをひねり出すことである。この精神で，サイコロの問題に対して私が出した答えは次のとおりである。

サイコロは，多様な初期速度と初期回転速度で振り出され，その後の動きも非常に複雑である。だからいろいろな場合が生じるであろう。しかし，じたばたしても始まらない。静かに目を閉じて，その千差万別の振舞いがすべて起こったとして，それらの平均的状況を想像してみる。そうすると，何もかもが起こった後で，サイコロは空中で動きを止め，静かに机の面へ向かって降りてくる姿が浮かび上がってくる。このとき，回転は止まり，同じ姿勢を保ったまま，ただ重力に引っ張られて降りるのみである。気の遠くなるようないろいろなことが起こったあとの平均的状況だから，このとき，可能なすべての姿勢が等しい確率で生じるとみなしてよいだろう。そして，降りてきたサイコロは，ゆっくりと机の面に接触し，はねかえることなくそのまま重力に従って静かに倒れ，一つの面を下にして止まる。

このイメージが思い浮かべば，しめたものである。ある姿勢をとってサイコロが静かに降りてきたとき，最終的に机の面に接するのは，サイコロの重心から鉛直に下に降ろした半直線が貫くサイコロの面である。この半直線が一つの面を貫く確率は，重心からその面を臨む立体角に比例する。（本稿の読者は数学の素養のある方々だと想像できるので，立体角については特に説明しない。より詳しい議論を知りたいという方は，私の私的ホームページ http://www1.odn.ne.jp/sugihara/ を参照されたい。）したがって，立方体とその重心が与えられているのだから，その重心から各面を臨む立体角を計算すれば，その面が下になって止まる確率（すなわち，その面の対面の目が出る確率）が求められることになる。

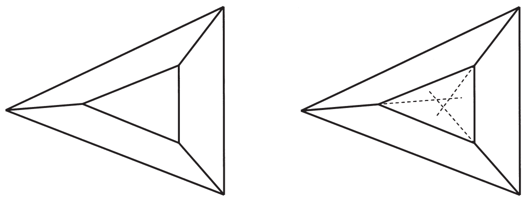
私はひと晩考えて，この計算方針をひねり出し，翌朝，番組の担当者に計算できますという回答をした。あとは，数学公式集から立体角の計算式を探し出し，機械的に計算を行なうだけでよかった。

上の私の方法が，サイコロの目の出る確率の計算法として正しいか否かは，人によって見解が異なるであろう。しかし，正しいか否かの決着はつかないと思う。要するに，これは認識の問題である。サイコロを振るという世界はこういうものだとみなして計算結果を信じるのも一つの世界観であるし，そうではないと考えるのももう一つの世界観である。

重要なのは，これ以外にサイコロの出目の確率を計算する説得力のある方法があるかどうかである。あれば，どちらがより真実に近いかを議論すればよい。なければ，ともかくそれらしき計算方針が一つ見つかったのだから，まずはそれに頼ってみるしかなかろう。現在のところ，具体的手続きを伴った確率計算法は他にはないように見える。したがって，これに頼るしかない。これが工学の世界であり，産業現場の世界である。

数学と応用現場の質的な違いをお伝えできるかもしれない例をもう二つ示そう。

第一の例は，絵からそこに描かれている立体を読み取るコンピュータを作りたいという場面である。対象を多面体（平面だけで囲まれた立体）に制限するものとする。図１(a)の投影図を私たちが見たとき，最も普通に思い浮かべるのは三角錐台を上から見下ろした図という解釈であろう。一方，この絵を投影面にもつ多面体を数学的な論理で探すと，存在しない。なぜなら，三角錐台の三つの側面を延長してできる３枚の平面の交点を作



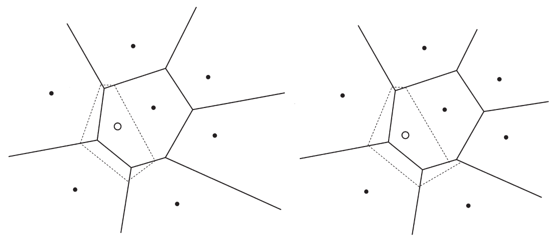
(a)　　　　(b)

図１　絵から立体を抽出する問題：(a) 三角錐台を表していると解釈できる絵; (b) 三角錐の頂点の作図不可能性

図しようとすると，図１(b) に破線で示すようにその点を含むはずの３本の直線が１点で交わらず，作図できないからである。したがって，絵から立体を抽出したいという工学的問題は，「その絵を投影図にもつ立体を探す」という数学的問題とは別のものである。

第二の例は，勢力圏図の作り方である。平面上に母点とよばれる有限個の点が指定されたとき，どの母点に最も近いかによって平面を分割することができる。この図形は勢力圏図とよばれる。図２(a) の黒丸の母点に対する勢力圏図は実線で示したとおりである。勢力圏図をコンピュータで作る理論的方法の一つは，逐次添加法とよばれるもので，少数の母点に対する勢力圏図（たとえば２点に対する勢力圏図は，その２点を結ぶ線分の垂直二等分線）から出発し，母点を一つずつ添加して，図を更新する方法である。この更新の様子を，図２(a) では破線で示した。白丸の母点が追加されたとき，その母点とまわりの母点との垂直二等分線を次々と作って追跡していくと，いずれは出発点に戻る。このとき，それらの線で囲まれた領域が新しい母点の勢力圏である。このような更新の手続きをくり返すと，多数の母点に対する勢力圏図を作ることができる。

しかし，これは，数学の世界の話である。現実のコンピュータでの計算は，有限の精度しかもたないから数値誤差が発生する。そのため，線と線の交点がいつも正しく求められるわけではない。その結果，図２(b) に示すように垂直２等分線の列は出発点に戻らないことがある。このように「計算は正しくできる」ことを前提とした数学の世界で設計された手続きは，誤差の発生する現実



(a)　　　　(b)

図２　勢力圏図を作る問題：(a) 逐次添加法の理論的な振舞い; (b) 数値誤差の発生する世界での逐次添加法の破綻

のコンピュータで正常に動作するとは限らない。コンピュータで正常に動作するプログラムを作ることはまた別の問題である。

現実の世界は複雑である。そこには，そのまま数学的に定式化できて，数学的手法が素直に使える問題などはない。数学的定式化などは寄せ付けない，どろどろした世界があるだけである。その中に無理やり割り込んで行って，数学の言葉で表せる問題を何とかひねり出して，数学の世界に引きずり込む。それが産業現場で行なわれている数学の応用である。

だから，数学の現実問題への応用というのは，実は数学の問題ではなくて，世界認識の問題である。数学の世界にとどまっていて，この数学はどこに使えるだろうという視点で探しても，現実の応用場面は見つからない。数学の枠をとび出して，世界を新しい目で認識するという飛躍を行なったとき初めて，応用が開けるのである。応用とは，項目の列挙ではなく，質的な違いだと述べたのはこのことが言いたかったからである。

というわけで，「今習っている数学は，将来いったいどんな役に立つの」という生徒の問いに答えられるようになるためには，与えられた問題に答えるのは当たり前の任務と認識し，望まれている答えにどこまで近い答えが出せるかと言う視点で努力するという心の姿勢をもたなければならない。産業現場に立ったことのない教員にはそんなことはできないというのであれば，産業現場で数学を使ったことがある経験者が，数学の教員免許がなくても教壇に立てる道を作るべきではないだろうか。