ワンポイント教材

奇数からなる群数列

―群数列の一考察―

数列を学ぶ際，偶数や奇数の列がよく用いられる。そのうち，奇数の列については，その和が

$$1+3+\cdots\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$$

であるように，生徒の興味をひく性質が多い。

ここでは，群数列の代表的な例について，その性質を数学的帰納法を利用して証明してみよう。

（例題１） １から始まる奇数の列を，n番目にn個の奇数が属するように，

（1），（3，5），（7，9，11），………

と群にまとめて並べるとき，第n群の中央の数はn^2であることを示せ。

ただし，nが偶数のときは，n^2は群の中央に隣合う２つの奇数の間の偶数を表す。

＜解＞　数学的帰納法で証明する。

$n=1$のときは，明らかに成り立つ。

$n=k$のとき，第k群の中央の数がk^2あるとする。このとき，$k=2m-1$（mは自然数）ならば，$k+1$番目の群には，$2m$個の奇数があり，中央の隣り合う奇数の間の偶数は，

$$\begin{aligned}&k^2+2\{(m-1)+m\}+1\\&=(2m-1)^2+2(2m-1)+1\\&=(2m)^2=(k+1)^2\end{aligned}$$

$$\cdots\ \underset{k\text{群}}{(\bigcirc,\cdots\bigcirc,\triangle,\overbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}^{m-1\text{コ}})},\ \underset{k+1\text{群}}{(\overbrace{\bigcirc,\cdots,\bigcirc}^{m\text{コ}},\bigcirc,\cdots\bigcirc)}\ \cdots$$

また，$k=2m$（mは自然数）ならば，$k+1$番目の群には，$2m+1$個の奇数があり，中央の奇数は，

$$\begin{aligned}k^2+1+2(m+m)&=(2m)^2+2(2m)+1\\&=(2m+1)^2=(k+1)^2\end{aligned}$$

$$\cdots\ \underset{k\text{群}}{(\bigcirc,\cdots,\bigcirc,\overbrace{\bigcirc,\cdots,\bigcirc}^{m\text{コ}})},\ \underset{k+1\text{群}}{(\overbrace{\bigcirc,\cdots,\bigcirc}^{m\text{コ}},\triangle,\bigcirc,\cdots\bigcirc)}\ \cdots$$

以上から，すべての自然数nについて，第n群の中央の数はn^2であることが成り立つ。　＜終＞

この結果から，偶数からなる群数列の中央の数を簡単に求めることもできる。

すなわち，２から始まる偶数の列において，n番目にn個の偶数が属するように，

（2），（4，6），（8，10，12），………

と群にまとめて並べるとき，この群数列は，奇数からなる群数列

（1），（3，5），（7，9，11），………

を構成する各数に１を加えた数である。

すると，奇数からなる群数列の第n群の中央の数がn^2であることから，偶数からなる群数列の第n群の中央の数はn^2+1である。

同様に，自然数からなる群数列

（1），（2，3），（4，5，6），………

の第n群の中央の数は，$\dfrac{n^2+1}{2}$であることがわかる。

さらに，次のような群数列を考えてみよう。

（例題２） ２から始まる偶数の列を，n番目に$2n-1$個の偶数が属するように，

（2），（4，6，8），

（10，12，14，16，18，），………

と群にまとめて並べるとき，第n群の最後の数は$2n^2$であることを示せ。

＜解＞　数学的帰納法で証明する。

$n=1$のときは，明らかに成り立つ。

$n=k$のとき，第k群の最後の数が$2k^2$あるとする。このとき，$k+1$番目の群には

$$2(k+1)-1=2k+1\ \text{（個）}$$

の偶数が存在するから，その最後の数は，

$$2k^2+2(2k+1)=2(k+1)^2$$

よって，$n=k+1$のときも成り立つ。

以上から，すべての自然数nについて，第n群の最後の数は$2n^2$であることが成り立つ。＜終＞

例題１は，群数列の授業で，生徒が発見したものである。数列は，生徒の自由な発想が生かされる教材である。一般的な解法と合わせ，生徒の発想を生かした授業を展開してみたいものである。

通巻第52号
2006年2月15日　印刷
2006年2月20日　発行
©編修・発行　実教出版株式会社
代表者　島根正幸
定　価　210円（本体200円）
発行所　〒102-8377　東京都千代田区五番町5
TEL.　03-3238-7777
http://www.jikkyo.co.jp/