実 践 記 録

関数グラフアートが示す学生・生徒の創造性

福井工業高等専門学校　一般科目教室・自然科学系教授　**坪川武弘**

1．はじめに

私の学校では５年前より，いろいろな関数を用いて何か絵を作ろうという企画を行っています。昨年（2004年）ある研究会でこれを全国コンクールにしてはどうかと勧められ，福井高専の数学科が事務局となり「第１回全国グラフアートコンテスト」を実施しました。今年度（2005年度）は，頭に関数をつけて「第２回全国関数グラフアートコンテスト」として実施しています。グラフアートとはどんなものか，作品を紹介しながら解説します。

グラフアートのキャンバスは，電卓の液晶の画面です。私たちが用いているのは，グラフ電卓と呼ばれるもので，テキサスインストゥルメンタル社の製品です。様々な機種がありますが，画面の大きさは私の手元のTI-89という機種で160×100ドットです。グラフの描画として用いることができるのは，図1のように縦が少し短く，縦横の比率がほぼ１：２の大きさです。この画面に思い思いの絵を描いていきます。

入力できるグラフの種類は，$y = f(x)$型，媒介変数型，極座標型，数列型など６種類があります。入力関数は，TI-83という機種で10個，TI-89では99個まで可能です。仮想画面の範囲は自由に設定できます。

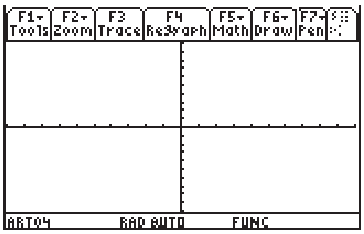

図１　グラフ描画画面

2．例１－作品「帽子」

最初のアート例は，$y = f(x)$型の関数を10個用いた作品です。これは三角関数７個と無理関数３個でできています。つばと帽子のすその境界曲線は５つの余弦関数で描かれています。例えば次のような式が使われています。

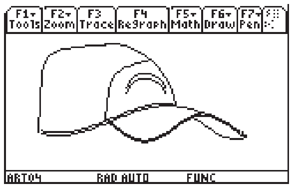

図２　作品「帽子」

$$y = 2.2\cos\left(\frac{2}{5}x - 0.65\right) - 2.8 \ (-7.5 < x < 5.15)$$

また，帽子の左から上にかけての曲線は，正接関数を用いて，

$$y = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{1}{3}x - 2.1\right) + 8.5 \ (-7.8 < x < -2.5)$$

を使っています。各関数は別画面で確認できます。図３は帽子の数式です。関数の定義式の最後の縦棒は，この右側にxの定義域を条件式として入力するための記号です。このように製作者が定義域をうまく設定しないといけないところに第１の特徴があります。更に，各軸方向へグラフを動かして思い通りの位置に置かないといけません。この最もよく用いる技術である平行移動を縦横に駆使することが第２の特徴です。

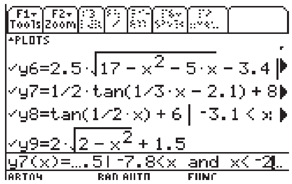

図３　「帽子」の数式

3．例２－作品「蝶」

次は蝶という題の作品です。これは極めて写実的です。この作品は，63個の$y = f(x)$型の関数を使っています。

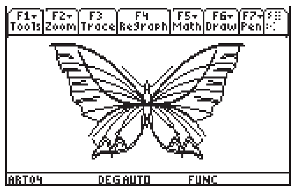

図４　作品「蝶」

用いている関数は，３次関数12個，２次関数50個，絶対値のついた１次関数が１つです。３次関数は骨格部分の太い曲線などに用いられていま

す。２次関数は羽根の細部の曲線に使われています。絶対値のついた１次関数は頭にある触角の部分です。平行移動と定義域のこまかな設定には脱帽です。しかも，この作品は３次関数と２次関数の個数が偶数個ずつあることから推察できるように y 軸に関して対称になるよう関数が使われています。すなわち，$y=f(x)$, $y=f(-x)$がペアで入力されています。この対称性の利用が第３の特徴です。

４．例３－作品「水面に映る富士」

次の作品は，富士山を題材にしたものです。富士山は人気のある素材で毎年どのクラスにも取り上げる生徒・学生がいます。左右対称な姿に創作意欲がわくのでしょう。この作品には43個の関数が用いられています。定数関数１個，２次関数10個，１次関数12個，無理関数12個（ルート内が1次式），無理関数８個（ルート内が２次式で円となるもの)です。y 軸に関する対称性はたくさん用いられています。各雲は x 軸に関して対称に２組ずつ作成されています。つまり $y=f(x)$, $y=-f(x)$の形が入力されています。また，雲自身は上下が線対称です。$y=f(x)+c$, $y=-f(x)+c$ の形です。

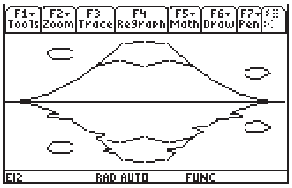

図５　作品「水面に映る富士」

大きくみれば，x 軸対称ですが，よく見ると下の富士は水面のゆらぎが像をゆがめている様が表現されています。このように対称性から少しはずして描くことによって感性をうまく表しています。

５．例４－作品「サターン」

図６は媒介変数表示を用いた作品です。土星とその衛星が15個（もっとたくさん知られているようですが）も描かれています。61組の媒介変数で表された関数を用いています。土星の本体は，

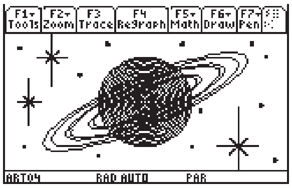

図６　作品「サターン」

$$\begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=a\sin t \end{cases}$$

の形の円を半径 a を20通りに変化させて描いています。

さて，皆さんはこの土星の輪をどのような式で描いていると思われますか。実は最も外側の輪（土星のA環でしょうか）の式は

$$(1)\ \begin{cases} x(t)=2.2\cos(t-1) \\ y(t)=1.1\sin t \end{cases}$$

なのです。その内側の環も

$$(2)\ \begin{cases} x(t)=a\cos(t-1) \\ y(t)=b\sin t \end{cases}$$

の形をしています。私はこの簡単な式を見たときすぐにはこれが楕円となることに気付きませんでした。いろいろ式をいじくりまわしてようやく標準形との対応がわかりました。第６回の「グラフ電卓研究会 2005年６月」で紹介したところ，リサージュ図形ですよと指摘されました。電気工学の分野ではよく知られた図形です。

ところで，右上がりの楕円にするには式(2)のように x に１のずれを入れるのが効果的です。計算してみると x 軸との傾き θ は一般に式(2)の場合

$$\tan 2\theta=\frac{2ab\sin(1)}{a^2-b^2}\approx 1.683\times\frac{ab}{a^2-b^2}$$

で求めることができます。式(1)の係数で約22.8度の傾斜になります。土星の赤道面も約26.7度傾いていますから適当な数値です。

この作品を作った学生は，電気関係の学科ではありません。本人は，円の媒介変数表示を元に楕円が何とか作れないかと試行錯誤を繰り返したそうです。その結果が式(1)となったのです。数学の先生に「傾斜した楕円を描いてください」とお願いすると多くの方は

$$(3)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$$

の形の式を作られるのではないでしょうか。私はこの式(3)を使います。でも式(1),(2)の単純さにはかないません。この学生のように，関数と式の使い方を自分たちで工夫し思いもかけないうまい使い方を作り出してしまうというのが，この取り組みの第４の特徴です。

６．例５－作品「チーター」

図７は，第１回全国コンテストの最優秀作品（の１つ）です。このチーターは３年生の作品です。１年生からグラフアートを手がけてきて３年目ですから関数の使い方も手慣れています。94個もの数式を用いています。

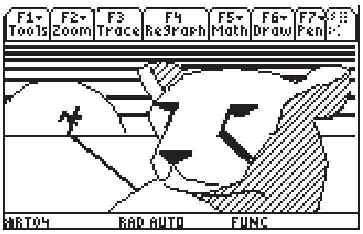

図７　作品「チーター」

１次関数68個，２次関数12個，無理関数10個（ルート内１次式），無理関数３個（ルート内２次式），正弦関数１個からなっています。地平線の彼方の夕焼け空は，

(4) $y = \dfrac{1}{1000}x + const \quad (\alpha < x < \beta)$

の形の１次式で表されています。手前のチーターの頭部に隠れて見えない部分を，こまめに範囲指定して陰線処理をしています。傾きの $\dfrac{1}{1000}$ は何のためにあるかというと， $y = const \quad (\alpha < x < \beta)$ では， x 軸に平行な直線を α から β まで描いてくれないからです。関数式の定義に式(4)のように x を陽に含まないと定義域の指定ができない仕様となっています。これはこれで意味のある仕様なのですが方言のようなものです。

$y = 0 \cdot x + const \quad (\alpha < x < \beta)$ でもいいのですが，

$\dfrac{1}{1000}$ とするところに作者の意思が感じられます。夕日による長い影，日陰の部分の表現に大変な手間をかけたとのことです。作品としての存在感，構図のよさなど芸術的なセンスもなかなかのものではないでしょうか。

このように，美しさを求める心，大げさかもしれませんが「芸術性の追求」を大切にするということが第５の特徴といえるかと思います。

７．まとめと今後

関数グラフアートの取り組みは，学生・生徒が自分たちで作りたいもの，つまり問題を設定します。そしてそれに向けて自分たちの「数学力」を駆使します。数学の勉強履歴のなかで，何かを創造するということは本当に少なかったのではないでしょうか。関数グラフアートの取り組みはそのような貴重な経験だと思います。いろいろな関数をおもちゃにして思い思いの曲線を描く，適当な平行移動や対称移動を利用する，それは十分数学をしていることになります。なによりもその中に美しさを追求する心理が自然と入ってくることがうれしいことです。実は10代の子供にグラフ電卓を持たせ自由に使わせると，小さな画面に自然発生的に絵を描き始めます。ちょうど手ごろな大きさと機能なのでしょう。

今回紹介した作品は，2004年度の全国コンテストでの優秀作品（例２,４,５）と最近の作品（例１,３）です。主に福井高専の学生の作品で説明しました。本校での構内選考とクラスでの選抜，講評会については今回触れることができませんでした。

昨年度の全国コンテストでは，本当に素晴らしい作品が多く，選定に苦慮しました。今年度（2005年度）は第２回の取り組みとして，実行委員会形式（実行委員長 一松信）で実施しています。 $y = f(x)$ 型の関数を10個まで用いる「制限部門」とそれ以外の「自由部門」に分けて審査をします。クラス単位での応募は１クラス３作品に予備選抜をお願いしています。優秀作品には，賞状とちょっとした賞品を用意します。優秀作品はHPにて公開予定です。