



数学の素朴な疑問

回答者・東京大学大学院数理科学研究科教授

岡本和夫

Q. 今回は、まず教科書の内容について質問します。何人かの先生から、具体的な質問が営業部に来ているそうです。そのなかからいくつかを選んでおたずねします。

A. 何といっても教科書が基本です。でもあまり難しいことはきかないでください。

Q. 教科書には、指導要領の歯止め規定などのため、題材にずいぶん制限があります。これについて疑問に思っている先生方がたくさんいます。例えば、愛知県立岡崎高校の石川邦利先生も、「『自ら学ぶ力を養う』というのが大切なテーマであるとしたら、『学ぶ教材』は教科書が最優先であるべき」なのに、『基本的な内容に制限した教科書』というのは、それ自体が『自ら学ぶ力を姿勢』を阻害しているように思えてなりません」とおっしゃっています。

A. 何といっても、まずはよい教科書を作らなくてははいけません。最近、「発展」ということで、指導要領の範囲外でも、条件付きで書いてよいことになりました。これを上手に使うって、数学の流れがよくわかるような教科書を作るよう努力しています。

Q. 現実には、高校現場は受験がどうしても重くて、数学の学問というより、受験に直結した指導に偏りがちです。石川先生のように真面目に学問としての数学に思いを馳せている先生は少数かもしれません。

A. そんなことはないだろうと信じてはいます。生徒が自分で学び、力をつけるためには、教科書と先生が大切な役割を果たすはずで。石川先生

頑張ってください。

Q. 具体的に質問します。群馬県立高崎高校の関口理先生が、方程式の解（かい）と根（こん）の区別について質問されています。私たちの年代だと、学校で根と習い、教員になってしばらく過ぎてから解に変わったと記憶しています。何で変わったのですか。

A. いわゆる現代化の指導要領の時です。根が解になった理由は知りません、というか数学的な理由はないと思います。近代化ということで、用語を統一したいというような単純なことでしょう。伝聞ですけど、個人的にそういう意見を持っているどこかの先生が、思いつきで発言して、それがそのまま通用しているとか、その程度の話です。私としては、戦後最大の誤りのうちのひとつだろうと思ってます。思いつきで、数学の文化を壊すようなことをしてはいけません。

Q. もとには戻らないのですか？

A. これも単に手間の問題でしょう。それなりに手続きが大変ですから。一度変えたら10年位はもとに戻せない、そのうち面倒になって……ということでしょう。問題なのは、根という言葉はそのまま残っていて、2次方程式の「解」の公式に、「根」号、 $\sqrt{\quad}$ 、が出てくるといような不都合がそのままになっている。

Q. 解と根はどこが違うか、というどうでもいいことが気になってしまったりして、混乱しますね。「たぬき」と「むじな」がどう違うか、最高裁で争ったとか……。

A. 大審院です。

Q. まあそれはそれとして次に行きましょう。東京都立西高校の豊川邦子先生が、「教科書に載っている定積分の定義についての説明が、どうしても生徒には理解しがたいものであるように思える」とおっしゃっています。区分求積法が教科書から消えた？ことと関係していますね。

A. 誠にその通りで、教科書を書いている立場からは、誠に申し訳ない限りです。区分求積法による面積の定義は、自然であり応用もあり、最も基本的なことなのですが、微分の逆演算で積分と定

義する方法に変わってしまいました。指導要領上のこともあり、高等学校の現場の傾向も、定義などに時間をかけずすぐ計算できることが大事、となっているので、現行のようになっています。

Q. 現場で補う必要がありますね。でも教科書の流れが違ふと難しいところです。

A. 大事なところなので、詳しく述べます。現行の教科書では、導関数を与えて、その原始関数、あるいは不定積分を定義します。実は原始関数と不定積分は別のものですが。

Q. その点はまた後でうかがいます。

A. それで、次に面積が不定積分であることを説明しているわけです。数学としては不自然です。

区分求積法で面積を定義すれば、面積が不定積分となっていること、つまり微分と積分が互いに逆の演算になっていることは、「微分積分学の基本定理」とまで呼ばれる、最も大切な結果となります。現在の指導法だと、焦点があいまいになって、微分積分の意味がわかりにくくなり、微分積分が計算だけになってしまいます。

Q. せっかく微分積分を学んでも、一番大切なことを知らないことになる。

A. その通りです。意味が理解されないと、簡単なことが難しくなってしまうことがあります。例えば、区分求積法だと、積分は和の極限ですから、関数の和の積分が積分の和になる、つまり積分の線形性は当たり前です。現行だと、たくさん覚えなくてはいけない。大学で線積分などを学びますが、すべて区分球積です。とりわけ、物理を勉強するときには自然な考え方です。

Q. ついでに原始関数と不定積分の違いについても教えて下さい。

A. 導関数が $f(x)$ になる関数が原始関数です。一方、 $x=a$ と $x=b$, $y=f(x)$ で囲まれた面積を区分球積で定めておけば、積分

$$\int_a^x f(t) dt$$

つまり上端を変数と見たものが $f(x)$ の不定積分です。

Q. そういえば、名古屋大学附属高校の福谷敏先

生が教科書にある平均値の定理は微分形で書くと思議で、積分の平均値が先ではないか、という質問を送ってくれました。

A. 確かにそうですね。

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c) \quad a < c < b$$

は、左辺が平均値ですからね。 $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$ で囲まれた部分の面積を、底辺の長さが $b-a$ の長方形の面積で表しています。 $y=f(x)$ が連続して、最大値を M , 最小値を m とかくと、 $a > x > b$ において

$$m \leq f(x) \leq M$$

辺々積分して $b-a$ で割れば

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

あとは中間値の定理です。

Q. $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすれば、この式は

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c) \quad a < c < b$$

と書けますから、「平均値の定理」が出ますね。

A. ロールの定理は直観的にも分かり難いものではないから、平均値の定理の微分形もそんなに無理はないと思います。ただ、微分形でここまで書くならば、テーラーの定理も書きたくなります。

Q. というわけで、数Ⅲの教科書に書いてもらいました。

A. テーラーの定理、さらにテーラー展開は大学での解析学の中心ですから、高校生が知っていてもいいですね。使いみちはいくらでもあるでしょう。

Q. 数学ですから先のことを知っていれば、それだけ見通しがよくなりますからね。ところで、いつも同じ話題になってしまうのですが、大学の入学試験で、大学ではじめて習うことを使って答案を作ってよいのでしょうか、という類の質問がたくさん来ています。

A. センター試験も終わって、個別学力入試がいよいよ本番となったところですから、季節の話題ではあります。いくつか検討してみましょう。

Q. 前号で、テーラー展開を話題にして、大学で習うことを使ったら、それだけで駄目、というこ

とにはならない、という話をしました。一般的なことは、そちらを読んでいただくことにして、繰り返しになるけれど、具体的な話題について教えてください。青森県立五戸高校の相馬誠先生が、ベクトルの外積を入試で用いたら、正しい答案でしょうか、と質問しています。

A. これは難しいことを使いましたね。一般論としては、自動的に駄目とはなりません。入学試験を大学から見れば、大学での学習に十分な力があるかどうかを判定しているのですから、答案が指導要領に適合しているかどうかは、どうでもいいのです。もちろん、正しく理解していることを求められます。範囲がどうこうというより、答案として立派なものを書いてもらえば最善です。

Q. 答案の書き方で大切なことは何でしょうか。

A. 昔書いたことがあります、数学の答案の書き方の基本はたった3つです。

① 横書きに書く。

② 各行は左から右に書く。

③ 行は上から下に続く。

これだけです。

Q. それはあまりに基本的すぎませんか？

A. でも、これが守られていませんから。こちらとしては、それでもどこかに正しいものがあるのではないかと、真剣にあちらこちら読んでいます。困ったものです。

Q. 学校でも指導しないとイケませんか。でも現在の高校生は、そこまでの余裕がないかもしれません。

A. 極端ないい方をしましたけれど、他人に読ませる文章には、最低限守らなければならないことがあるでしょう、ということです。ついですが、上手な字を書く必要はないけれど、ていねいな答案を書いてほしいと思っています。6なのかbなのか、9なのかqなのか区別できない。試験の現場では落ち着きを失っているかもしれませんから、当人も6とbの区別ができなくなって間違ったりしています。

Q. 想像していたより深刻かもしれませんね。もう少し簡単な質問ですけど、学校で学んだ公式

を断りなくどこまで使っているか、ということです。前回は

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-a)(\beta-x)dx = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

を題材にしました。他にも例がありますか。

A. これも繰り返しになるけれど、どれもケース・バイ・ケースです。例えば

$$\int \log x dx = x \log x - x + C$$

は、どの教科書にも出ています。長い計算の途中とか、答案の中で必要になって使うのなら、別に部分積分の計算を書かなくてもいいでしょう。もちろん、積分の計算が問題の主題だったら、計算省略とはいきませんけれど。

Q. 積分の公式が出たので

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

はどうでしょう。置換積分すると結構面倒なことになります。

A. でも、その公式は、「半径1の円の $\frac{1}{4}$ の面積を考えて」と一言書けば誰でも納得するでしょう。

Q. なるほど。それを書くだけで、断りなく使うのとは全然違いますね。そういえば、上の公式も「部分積分により、……だから」とすればいいですね。

A. その通りです。答案を書くときに、面倒だから、という気持ちは絶対駄目です。それが、ていねいに書く、ということです。大事なことから繰り返しますが、いずれもケース・バイ・ケースということです。

Q. 高等学校の生徒、それと先生方が考えていることと、大学側の見方にはずいぶんギャップがあるようにも思いますが。

A. 高校から見れば入学試験は出口ですけど、大学にとっては入り口ですから、仕方ない点もあります。数学のギャップというより、意識の差が大きいです。それをできる限り小さくする努力を、高等学校と大学の双方で続けていかなければならないと思っています。