ワンポイント教材

2曲線の交点を通る曲線

−交点を通る曲線群の考察−

２直線の交点を通る直線群や２円の交点を通る円に関しての問題では，次のことがらがよく用いられる。

「２曲線 $f(x,y)=0$，$g(x,y)=0$ の交点を通る曲線の方程式は，

$k\cdot f(x,y)+l\cdot g(x,y)=0$ …①

ただし，k，l は同時には０でない任意定数」

ここで，①式の x，y の次数は，$f(x,y)$ 及び $g(x,y)$ の次数を超えることはない。すなわち，①式の表す曲線は，与えられた２曲線の交点を通るすべての曲線を表してはいない。

よって，①式を利用する際には，①式がどんな曲線を表し得るのか必ず確認させる必要がある。

次の例題を考えてみよう。

（例題１）

直線 $y=x+1$ と放物線 $y=x^2-2x$ の交点と点（１，０）とを通る円を求めよ。

これを①式を利用して解くとどうなるであろうか。

①式を適用すれば，

$k\{y-(x+1)\}+l\{y-(x^2-2x)\}=0$ …②

は直線と放物線の交点を通る曲線を表す。

この曲線が点（１，０）を通ることから

$k\{0-(1+1)\}+l\{0-(1^2-2\cdot 1)\}=0$

よって，$l=2k$

ただし，$k\neq 0$

これを②に代入して

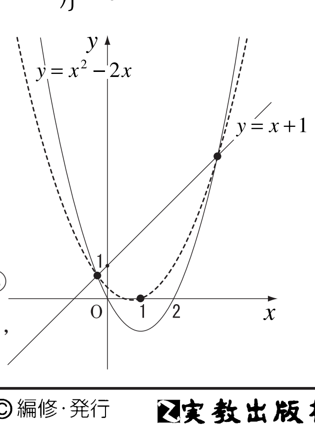
整理すると，

$3y-2x^2+3x-1=0$

すなわち，

$y=\dfrac{2}{3}x^2-x+\dfrac{1}{3}$ …③

これは放物線であり，求める円ではない。



一般に，一直線上にない異なる３点を通る円はただひとつ定まるが，円の他にその３点を通る放物線も定めることができる。③は与えられた直線と放物線との交点を通る放物線なのである。

このように，（例題１）を解くには①式は利用できない。実際に交点を求め，３点を通る円を求めるしかないのである。

次の＜例＞も，①式を用いては解けない。

＜例＞２つの円 $(x-1)^2+(y-1)^2=3$ と $x^2+y^2=1$ の交点と点 $(0,2)$ を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ を求めよ。

ただし，次の（例題２）のような問題は，①式を利用して解くことができる。

（例題２）

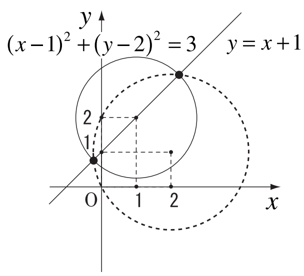
直線 $y=x+1$ と円 $(x-1)^2+(y-2)^2=3$ の交点と原点を通る円の方程式を求めよ。

＜解＞方程式

$k\{y-(x+1)\}+l\{(x-1)^2+(y-2)^2-3\}=0$ …③

で表される曲線は，２つの円の交点を通る。

また，この方程式は x, y についての２次の同次式であり，円を表している。円③が原点を通るとき，



$-k+2l=0$

よって，$k=2l$

これを③に代入して

整理すると，$x^2+y^2-4x-2y=0$

すなわち，求める円の方程式は，

$(x-2)^2+(y-1)^2=5$　　　（終）

以上のように，２曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ の交点を通る曲線の方程式

$k\{y-f(x)\}+l\{y-g(x)\}=0$

は，２直線の交点を通る直線群や２円の交点を通る円群を求める際には利用できるが，直線と放物線，直線と円などの交点を通る曲線については，十分注意して利用する必要がある。

通巻第51号
2005年 10月 1日　印刷
2005年 10月 5日　発行
©編修･発行　実教出版株式会社
代表者　島根正幸
定価　210円（本体200円）
発行所　〒102-8377　東京都千代田区五番町5
TEL.　03-3238-7777
http://www.jikkyo.co.jp/