



数学の素朴な疑問（受験編）



回答者・東京大学大学院数理科学研究科教授 岡本和夫

Q. 3年生を担当していますので、この季節ともなれば生徒と同じくらい大学入試を意識します。今回のこのコーナーは、数学の素朴な疑問、受験編、ということをお願いしたいですね。

A. 入試に関することで、先生方から公式の使い方についてよく質問されます。これこれの式をそのまま利用して解答を書いたら減点されるでしょうか、どの程度の説明を付けたら良いでしょうか、など少なからぬ先生達が気にしているようです。

Q. 私も気になります。実際のところ、どのように判断されるのでしょうか。

A. ケース・バイ・ケースでしょう。それしか答えようがない。

Q. まあ、そうおっしゃらずに教えて下さい。具体的な例を挙げましょうか。まず、極限値の計算で、ロピタルの定理の使い方です。 $f(a)=g(a)=0$ のとき、ロピタルの定理より、求める値は

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

とだけ書いたら説明不足でしょうか。

A. ロピタルの定理は、正確には de l'Hôpital の定理です。この定理は意味を良く理解していないで使うと、間違える危険性があります。試験で誤って利用したら、バツサリと減点されるでしょうね。そもそも私はこの定理は嫌いです。

Q. 先生の好き嫌いはこの際どうでも良いのですが……。意味をきちんと理解していないとだめだ、ということは分かります。もう少し詳しく教えて下さい。

A. ロピタルの定理は、コーシーの平均値の定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad a < c < b$$

から導くことができます。関数 $f(x)$ 、 $g(x)$ に関す

る仮定、定理の証明などについては、教科書「数学Ⅲ」に書きました。「発展」を参照してください。

Q. $b \rightarrow a$ とすればロピタルの定理ですね。「発展」には、テーラー展開等の公式もこれを利用して導いてあります。

A. テーラー展開は関数の多項式近似でもありませんから、これを知っていればロピタルの定理をわざわざ使う必要はありません。正しい極限値が計算できていれば、その根拠としては、「ロピタルの定理」というより「テーラー展開」と書いてある方が、答案の書き手の、数学に対する理解の深さがよりよく伝わって来ると思います。

Q. テーラー展開は高等学校の数学の範囲外ですが、このような大学で学ぶことがらを入試で使っても構わないのでしょうか。

A. どんな大学でもそうだと断言することはできかねますが、原則として、数学的な事実を正しく使うならば、何を利用して良いと思います。実際には、答案の流れを見て判断します。

Q. 大学で習うことを使ったら、それだけで駄目ということにはならないのですね。数学の入試については、受験者の側も、高等学校指導要領にこだわらなくてもいいのでしょうか。

A. もう一度大学に入り直す人も受験者に混じっています。彼らばかりでなく、指導要領に無理に合わせる必要なんかありません。とにかく、どのような数学的事実を利用しているのか、ということが読み手に明解に伝わり、その使い方が正しいこと、この2つが大切です。

Q. どっかで教えてもらったテクニックを、良く考えもせず使ったらいけないのですね。

A. 採点者は数学のプロフェッショナルだから、ごまかしはすぐバレます。理解度を正確に判断することもできる人達が答案を読んでいます。

Q. 厳しいですね。

A. いや、大体採点者は何とか点をあげようと努力している、優しい人達です。なかなか、その努力に見合う答案が……。何とかありませんか。

Q. 話題を変えましょう。グラフの概形を描く問題で、関数値の増減は当然として、凹凸はどの程度調べたらよいのでしょうか。

A. $f'(x)$ はもちろんのこと、その上に $f''(x)$ を計算する必要があるか、ということですね。

Q. 問題文に書いてなければ $f''(x)$ の値は調べなくても良いのですか。

A. これも最終的にはケース・バイ・ケースで判断することなので一般的には何とも言えません。一番大切なことは、問題で何を求めているか、ということ適切に判断するという読解力です。

Q. ケース・バイ・ケースのところをもう少し詳しくお願いします。

A. グラフのある部分が上に凸である、としましょう。全員がそこを正しく描いていれば、何事もなく採点が終了するでしょうが、なかなかそうはいかない。その部分を下に凸とか、直線みたいに描く、雑で無神経な人は、必ずいるわけです。採点者も人間ですから、そういう仕打ちには怒るのです。 $f''(x)$ も計算していないのか、と。もう一度全答案を見直したりして……。

Q. そうすると、一応は計算しておかないとズイことになる。

A. 時間の余裕もあるでしょうが、 $f''(x)$ まででは必要だとしておいたほうが良いと思う。関数の極大値・極小値の判定には2次式による近似が基本であるし、実際にも使うことがらです。大学に入ってから大いに重要となることはきちんとおさえておく。無駄ではないですよ。

Q. もうひとつ、今度は積分で、

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(\beta-x)dx = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

という公式は使って良いでしょうか。

A. これは前のケースとは意味が違いますね。知っていたら便利という公式かな。この式そのものが出題のテーマだったら別ですが、計算の途中

で使うのは特に問題にならないと思います。ただし、計算を省略して答にすぐ向かう答案は、答が違ふときには、とても印象が悪い。途中経過を評価することができないから、バツサリ減点されるでしょう。

Q. 正しく答を導けばOKだけれど、間違ったときには傷が大きいかもしれない、というわけですか。ケース・バイ・ケースを判断しながら答案を書くのは、受験生にはちょっと難しいですね。答案作成のときに大切なことを教えて下さい。

A. 国語の記述式問題では、何々について何字以内にまとめよ、ということで解答用紙に原稿用のマスがあらかじめ印刷してあります。それに対して数学の答案用紙は白紙でしょう。

Q. だから、国語より数学のほうが、書く量は多くなるでしょう。

A. つまり、採点者が読む文章の量も多いことになります。上手なたとえではないかも知れないけれど、国語は、投げられたタマを正確に受けて、一度正しく返球すればそれでおしまい。数学の場合は、このやりとりが何度もある。

Q. といっても、相手は誰もいませんけれど。

A. 自分一人で二役こなすのですよ。こう書けばあなた、分かってもらえますか、いや、私はあなたと初めてお目にかかったわけで、自分だけの約束事を使われては、意味が通りませんよ。こんな具合に進めるのです。

Q. ヴァーチャルな対話というわけですか。

A. 単なるおしゃべりと異なるのは、この対話を通して、正しい結論を導くという明快な目的があることです。

Q. そういう勉強はどうすればよいのでしょうか。

A. そのために、先生方の指導が大切です。生徒の答案を、入試採点者の眼でながめて下さい。先生が、どこの誰かは知らない受験生の答案を見ているつもりになって。

Q. こんな省略した書き方をされていて、他人が理解して評価してくれるかどうか、という立場から解答を見直すのですね。難しそうだけれど、何とかやってみます。