ワンポイント教材

曲線の接線と方程式の解

ー恒等式の利用(２)ー

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax+b$ との交点の座標は, 方程式 $f(x)=ax+b$ の実数解である。

よって, この方程式が実数解 α, β をもつとすると,

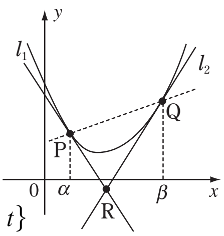
$$f(x)-(ax+b)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)$$

の形に因数分解できる。

このことを利用して, 曲線の接線や曲線と接線でつくる図形の面積などを求めてみよう。

（例題１）放物線 $y=ax^2+bx+c$ 上で，$x=\alpha$，β に対応する点P，Qにおける接線 l_1，l_2 の交点Rの x 座標は，$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ であることを示せ。

＜解＞交点Rの座標を（s，t）とし，Rを通る直線の傾きを m とすると，その方程式は



$$y=m(x-s)+t$$

これが, 放物線と点Pで接するとすると

$$ax^2+bx+c-\{m(x-s)+t\}=a(x-\alpha)^2$$

よって，両辺の各項の係数を比較して,

$$b-m=-2a\alpha,\ c+ms-t=a\alpha^2$$

ゆえに, $(2a\alpha+b)s=a\alpha^2-c+t$ …①

同様に，点Qで接するとき,

$$(2a\beta+b)s=a\beta^2-c+t \quad \cdots②$$

①－②より，$s=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ （終）

（例題２）例題１において，放物線と接線 l_1，l_2 とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。（$a>0$）

＜解＞接線 l_1 の方程式を，$y=m_1x+n_1$

l_2 の方程式を, $y=m_2x+n_2$ とすると,

$$S=\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\{ax^2+bx+c-(m_1x+n_1)\}dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\{ax^2+bx+c-(m_2x+n_2)\}dx$$

$$=\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}a(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}a(x-\beta)^2dx$$

$$=a\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+a\left[\frac{(x-\beta)^3}{3}\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3$$

（終）

また，放物線と直線PQとで囲まれた図形の面積 T は，次のように計算できる。

すなわち, 直線PQの方程式を $y=mx+n$ とすると,

$$T=\int_\alpha^\beta\{(mx+n)-(ax^2+bx+c)\}dx$$

$$=-a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)dx$$

$$=-a\left\{\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2dx+(\alpha-\beta)\int_\alpha^\beta(x-\alpha)dx\right\}$$

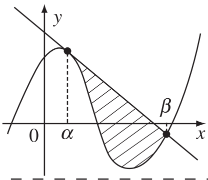
$$=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

このように，定積分の計算は,

$$\int(x-\alpha)^n dx$$

の形に変形できれば簡単に処理できる。

（例題３）曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 上の $x=\alpha$ に対応する点Pにおける接線が，図のように，$x=\beta$ でこの曲線と交わるとき，曲線と接線とで囲まれた図形の面積を求めよ。（$a>0$）



＜解＞接線の方程式を，$y=mx+n$ とすると

$$S=\int_\alpha^\beta\{mx+n-(ax^3+bx^2+cx+d)\}$$

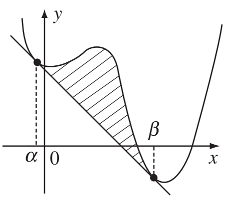
$$=-\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\beta)dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\alpha+\alpha-\beta)dx$$

$$=-\left\{a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^3dx+a(\alpha-\beta)\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2dx\right\}$$

$$=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4$$

右図のように，４次関数 $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ のグラフと接線とで囲まれた図形の面積 S も同様に計算できる。生徒に練習させたい問題である。$S=\frac{a}{30}(\beta-\alpha)^5$ となる。



通巻第50号
2005年2月15日　印刷
2005年2月20日　発行
©編修・発行　実教出版株式会社
代表者　島根　正幸
定　価　210円（本体200円）
発行所　〒102-8377　東京都千代田区五番町5
TEL. 03-3238-7777
http://www.jikkyo.co.jp/