数学の素朴な疑問（対話編）

― 数学の作法について ―

回答者：東京大学大学院数理科学研究科教授　岡本和夫

Q．数学にはいろいろな用語が出てきて，教科書にも定義が述べられていますが，実際に使うときには，もっと自由に使っているような気がします。生徒はそんなに気にしてはいないかもしれませんが，授業を行う立場としては，何かごまかしているような気がしないわけでもありません。そんな疑問についてきいてみたいと思っています。

A．確かに数学の用語は厳密に定義されてはいますが，使うときはもっと広く解釈することが少なからずあります。ただし規則通りではないとしても，一定のきまりはあります。何というのかな，例えば作法みたいなものに合っていれば，もっと実際的に使ってよいということになるのではないでしょうか。

Q．具体的な例を挙げます。単項式，多項式，整式の違いはどうでしょうか。

A．$3x^2y$ のように，数と文字のかけ算で表される式を単項式といい，単項式の和で表される式，例えば x^3+5xy^2，を多項式という，というのが定義ですね。単項式と多項式を合わせて多項式という，となっています。数学の教育での手順としてはこれでよいのかもしれませんが，定義の方法はこれだけではありません。

Q．単項式の和，というときには，$x^2+(-1)y$ を x^2-yと表す，という意味で差も含んでいますね。

A．もちろんです。数といえば正の数とはかぎりませんからね。中学校の教科書だったら，単項式の和や差で表される式を多項式といわなければなりません。高等学校だと簡単に「和」だけですませてしまう場合もあるでしょう。このような用語の使い分けが，さっきいった作法の一例ですね。

Q．細かいことをいちいち気にしているとかえって理解の妨げになるかもしれません。ところで，加減乗除のうち，わり算が除外されているのは，数学とくに代数学でいう「環」ということですね。

A．その通りです。だから，数と文字の積と和で表される式を多項式という，という定義の仕方も普通にあるわけです。ただし

$$3\times x\times x\times y+(-5)\times x\times x\times x$$

は，$3x^2y-5x^3$ と表す，という約束をしておかないと，あとあと不便です。

Q．そうすると，数と文字のかけ算で表されている多項式の各部分が項で，たったひとつの項からなる多項式が単項式，ということになります。

A．その通りです。この場合，単項式を多項式から区別する必要があるときだけ，単項式とはっきりいうわけです。うるさいことをいえば，x^2+0 は x^2と同じですが，何を考えているかによって多項式と単項式の違いが現れるかもしれません。厳密な定義にこだわっていると，難しい問題が生じるので，多項式で通してしまう。これも一種の作法です。

Q．多項式と整式は区別しないのですね。

A．「次の整式はいくつの項からできていますか」という問いに答えるときには，中学生は単項式と多項式の区別を求められていますが，こんなことは次の段階に進めばそんなに重要でないので，実際上は整式と多項式を区別しません。整式という言葉は，分数式あるいは有理式との対応で出てくるので，とりあえず多項式と同じです。

Q．少し話題が変わるかもしれませんが，「等しい」と「同じ」はどこが違うのでしょうか。

A．結構難しい質問ですね。どちらかというと数学より論理学の問題でしょう。とりあえず私の

考えを述べてみましょう。△ABC＝△DEFといわれたらどう理解しますか。

Q．逆に質問されてしまった。そう書かれたら，三角形ABCと三角形DEFは全く同じもの，つまり各頂点が一致する，A＝D，B＝E，C＝F，と主張していると思いますが。合同の場合には，△ABC≡△DEFと書く約束になっていますから。しかし，△ABCと△DEFの面積は等しいか，という設問への答えなら，面積の等式と理解してあげたいです。

A．文脈で理解が違いますね。いずれにせよ，数学の作法にかなっていれば正しく伝わるわけです。直観的には，等しいものは同じ，同じものが等しいかどうかは，その場合に応じた数学的な立場による，という感覚を持っています。少なくともAとBが同じ，というときには，前提として違う範囲に属するものが２つあって，ある数学的な見方をすれば，同じものとみなしてよい，ということではないでしょうか。数学用語でいう，合同，同値，同型，みんなそんな感じですかね。

Q．分かったような，何かごまかされているような気がします。

A．立場による，といいましたが，もう少し別の説明をしましょう。つまり，違うものを同じものとみなすことによってよいことがたくさんあれば，その同じものは互いに等しい，と見るわけです。例えば先生が黒板に書いた三角形と，生徒がノートに書いた三角形は，別の三角形だけれど，形が同じだ，つまり相似だ，と見れば，各頂角は等しく，それからいろいろな事柄が分かります。だから同じ形と見るとよいことがあるのです。

Q．等しい，ということには，角度とか長さとか定量的なものが考えられている気がします。

A．確かにその通りです。もちろん，平面上の２点が等しい，ということもありますから，あまり厳密に考えるとかえってよくありません。

Q．何を考えているのかということで使い分けるという，具体的な例はいくらでもありそうな気がします。２次方程式の解の個数はどうでしょう。

A．いわゆる重解の扱いですね。解はひとつ，ただし重根，といえばどんな場合にも通用しますけれど。やはり「根」を解と言い換えたのは問題だ。

Q．あらぬ方向へ行きそうなので話題を変えましょう。自然数と正の整数の違いについて。入試問題などでは，正の整数ということが多いようですが，自然数ではまずいのですか。

A．この違いは，作法というより定義の問題です。高等学校数学までは，自然数と正の整数は同じものなのですが，０以上の整数を自然数というブルバキ流定義があって，私達はこちらを利用します。有限集合の元の個数が自然数であるから，空集合の元の個数０も自然数であるとしています。

Q．しかし今さら小学校の定義を変えるわけにもいかない。

A．だから，入試問題で自然数とは言い難くなってしまって，正の整数なら間違いがないだろうと考えているのではないでしょうか。先ほどの，根と解，と同じように，数学教育用語と数学用語がずれているのです。自然数に話をもどせば，n 次多項式の係数をa_nで表せば，当然 n は０以上となりませんか。

Q．確かにそうですね。高校数学と大学で学ぶ数学のギャップがよくいわれますけれど，これもその一例ですね。

A．他にも，２項係数を ${}_nC_r$ で表すのは高校数学までで，大学ではもうこの記号は使わない，などいろいろあります。ついでに，中学校と高等学校で微妙に違うこともあります。例えば，変域と定義域です。

Q．きちんと使い分ける必要がありますか。

A．これも場合によります。定義域と値域の区別ができていれば，変域でも理解されます。用語や言葉の定義のちがいが分かれば，あとはいかに説得力のある答案や論文を書くことができるか，という国語力の問題です。もともと２つに分ける，という「分ける」が「分かる」の語源ですから。