じっきょう
数学資料 No. 50

角に関する数学教材について

お茶の水女子大学理学部数学科教授　真島秀行

序

日本の和算において「角」の概念がなかったことは，「明治前日本数学史」(岩波書店）にも説明されており，よくご存知の方も多いと思う。本務校の附属学校で，「虹の数学」を今年度試行しているが，その目標の１つは三角関数のよりよい理解であり，角について考えてもらうことを，教材として提供している。

昨年末の12月に，企画展「和算の贈り物」をお茶の水女子大学と文京区との社会連携事業として行ったが，その準備段階で，附属図書館に頻繁に通い，収蔵物，特に和算書があるかどうか調査した。そうした作業中に，数学教育が専門ではない私は知らなかったのだが，数学教育の大家・佐藤良一郎氏の昭和初期に書かれた本に巡り合った。その中に次のようなくだりがあった。

「よく世間では『三角法などは教える必要がない。成る程測量技師にでもなろうというものには必要な学科であるに違いないが，普通一般のものにはその必要を更に認めない。吾々は（旧制の）中学校時代に随分苦心して学んだが結局，サイン，コサインという言葉を覚えただけであとは残らず忘れてしまっている。使いもしなければ，必要にも迫られない』という。(要約初：これに対して，もっともな点もあると認め，個々の学習動機を持たせるため，例えば，間接測量をあげている。そして，その体験をすれば，地球の大きさ，地球から太陽までの長さの話を聞いても：要約終）不思議とせず率直に受容れるだけの基礎ができ，それは誰にでも必要であると言わねばならない。これをしも不要という人があれば，その人達には文学も，歴史も，美術も，科学も，その人の専門外である限り，皆不要であるといわねばならぬ。」(出典：佐藤良一郎著「数学教育各論」第12章　三角関数の教授　p.484-486)

今も昔も三角関数に対する世間の風潮は変わら

もくじ

ないのである。それを何とかしたいと思う。その後，藤岡市の関孝和先生顕彰会事業「第９回おもしろ数学教室」で藤岡市立東中学校の皆さんを相手に講演を行うという機会も与えられ，「角についての数学」の話をすることに決めて，三角関数の歴史を日本に限らず調べて準備した。ご存知のことも多いと思うが，このような中から，読者の方々に参考になるであろう話題をいくつか提供したいと思う。なお，紙数の関係で前述以外の参考文献は省略した。

１．角の概念について

これは案外難しい。小学校では，三角形，四角形等を観察した後に，「１つの頂点から出ている２つの辺が作る形を『角』といいます。」という形で導入し，その後，「円を２つの半径で切り取った形を扇（おうぎ）形といいます。扇形で２つの半径の間の角を，この扇形の中心角といいます。」というように回転角としての角の導入を図っている。中学校では，「１つの頂点から出る２つの（無限に続く）半直線によって角ができる。」あるいは，「角は１つの頂点から出る２つの半直線によってできる図形である。」と導入される。見かけ上，定義が違うため，説明が必要である。角の定義としては，「平面上の一点から出る２つの（有限または無限の）半直線が作る形を「角(かく)」といいます。このとき，その点を角の頂点といいます。」そして，「２つの角は頂点と１つの半直線を重ね合わせぴたっとあったなら，等しいといいます。ただし，重なっている半直線の長さは一致していなくてもかまいません。」と角の相等の概念も同時に説明しておかなければならないのである。ここで，数の概念，特に，分数概念でも似たような概念作りをしていることに注意すると理解しやすいのではないだろうか。いろいろな分数で表されても同じ数があること，すなわち，

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\cdots,\ \frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\cdots,\ 1=\frac{2}{2}=\cdots,$$

等であることを説明するとよいのではないだろうか（有理数の概念は本質的にこのことから生まれている)。

上のように角というものをとらえると，「同じ角の代表」として何をとるのか，ということが問題になる。いくつか方法があり，１つは，中学校での角の導入の仕方であり，別の方法として小学校の中心角として角の導入の仕方があり，さらに直角三角形の角で代表するという方法もあり，これが三角比に直結しているわけである。

ある概念を導入するには，それなりの理由があるはずだが，角については次のように考えられると思う。暦，天文観察とのかかわりである。食料生産のことなどを思い浮かべれば，暦はなくてはならない大切なものであることがわかる。今は，1年，1月，1日，1時間，1分，1秒と時間の単位が決められている。昔は，それがなく，太陽や月を観測しながら，試行錯誤を繰り返し営々と努力した結果，徐々に，今日のような暦が作られてきているのである。天文の知識が数学と相俟って今日のような暦が出来上がったのだ。遠くにある月や太陽の位置を距離として直接に測ることは難しいため，「角」というそれより測り易そうなものを測ることを考えたといえる。

２．三角比表

同じ角には，角の大きさ，すなわち，角度が対応する。その単位の決定も重要なことで，藤岡市での講演の準備段階で「分度器の目盛りをどうやって目盛れるのだろうか」ということに悩んだ。角の三等分はコンパスと定規では作図できないため，1°という目盛りを初めて付けた人がどのようにしたのかわからなかったのである。歴史を紐解くと，正弦表は紀元前から作られ始めており，そこに解答を求めた(ある程度小さくなると線形近似をするようである。例えば，日本地図を作成するため全国測量をした伊能忠敬の使った器具には２つの目盛りの間に直線が引かれていた)。

バビロニア人は初め１年を360日と算定したよ

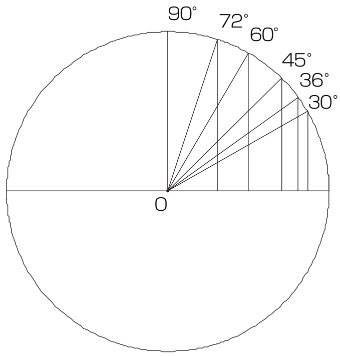

図１

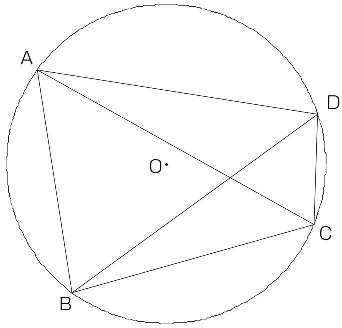

図２

うである。彼らは円周を360°に分け，この各々の1°は，地球の周囲を太陽が，１回転して生ずる，想像の１年の１日分の大きさに対応するものと考えられる。そうしたとき，60°は半径を使ってできるし，90°，45°，30°も比較的簡単に作れるし，72°は正五角形の作図で可能であり，角の二等分を用いれば，72－60＝12°から6°，3°を作れる（図１参照)。さらに角の二等分をすると1.5°，0.75°を作れるが，1°が作図できない。ところが，紀元前にヒッパルコスが（72°は使わず）7.5°ごとに，その後，プトレマイオスが0.5°ごとに（今日とは少し違うが）正弦表を作って天体観測に利用しているから，正弦の値を使って角度を定めていたと思う。プトレマイオスは，今日，プトレマイオス（英語読みでトレミー）の定理，図２において，AB×CD＋BC×AD＝AC×BDが成り立つことを証明し，特に対角線が円の中心を通る場合を考えることによって正弦関数の和差公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

（複号同順）を導き，さらには，

$$\frac{2}{3}\sin 1.5^\circ \le \sin 1^\circ \le \frac{4}{3}\sin 0.75^\circ$$

という不等式を導き，左辺および右辺の値の一致する位までの値を sin1° とした。

正弦の和差公式が三角比表作成に際して予め用意されたものであったということは，今回調べるまで知らなかった。和差公式を三角比表と関連させて教えるのは，数学を作る動機も教える上でよい教材になると思う。

３．虹の数学

私は複素領域における微分方程式の漸近展開を利用した研究をしているが，その研究の発祥地の１つは，自然界の「過剰虹」と呼ばれる虹の現象の解明に使われたエアリー関数の解析にあった。幾何光学だけでは解明されない波動光学的な現象で，19世紀の大半をグリニッヂ天文台長として過ごしたエアリーが行ったものである。虹は実際に自然界でも人工虹スクリーンを使っても見られ，その現象を解明したい気持ちにさせてくれる美しいものなので，よい教材になりうると思っていた。実際，幾何光学での説明による部分でも，光線が水滴を通る様子（図３）を描いたり，虹角を決定したり，虹の形がどんな図形かと考えると，高校での数学を総動員しなくてはならない。

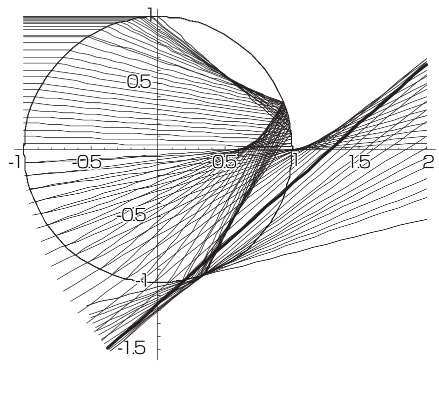

図３