ワンポイント教材

恒等式の利用

－恒等式と接線の方程式－

数学Ⅱで学ぶ恒等式は，数学Ⅲでの対数微分法における分数の部分分数への分解のときが，主な利用となっている。

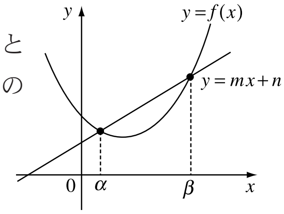
しかし，これ以外にも，次のような恒等式の利用法がある。

一般に，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=mx+n$ との交点の x 座標は，方程式

$f(x)=mx+n$

すなわち

$f(x)-(mx+n)=0$ の実数解である。



よって，たとえば，曲線 $y=f(x)$ が放物線であるとき，直線 $y=mx+n$ との交点の x 座標を，α，β とすると，

$$f(x)-(mx+n)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

が恒等的に成り立つ。

特に，$x=\alpha$ で直線が放物線に接しているとき，

$$f(x)-(mx+n)=a(x-\alpha)^2$$

が，恒等的に成り立つ。

このことを利用して，放物線の接線を求めることができる。

（例１）点 $(0,-1)$ から放物線 $y=x^2$ へ引いた接線の方程式を求めよ。

＜解＞求める接線の方程式を，$y=mx-1$ とし，接点の x 座標を α とすると，

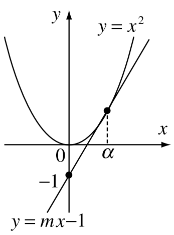
$x^2=(mx-1)$

は，重解 $x=\alpha$ をもつ。

よって，

$x^2-(mx-1)=(x-\alpha)^2$

が恒等的に成り立つ。



この右辺を展開して，両辺の各項の係数を比較すると，

$m=2\alpha$，$1=\alpha^2$

ゆえに，$\alpha=\pm1$，$m=\pm2$

したがって，接線の方程式は，

$y=\pm2x-1$　＜終＞

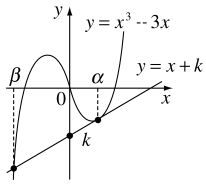
このように，２次方程式の解の判別式や微分法を用いなくとも，比較的簡単に接線を求めることができる。なお，（例１）において，α の値から，接点の x 座標も併せて求まったことになる。

この恒等式の考えは，放物線以外の曲線の接線を求める場合にも利用できる。

（例２）３次関数 $y=x^3-3x$ のグラフの接線で，傾き１の接線を求めよ。

＜解＞求める接線の方程式を，$y=x+k$ とする。

この接線とグラフとの接点の x 座標を α，他の交点の x 座標を β とすると，



$x^3-3x=x+k$

の解は，$x=\alpha$（重解），β である。

よって，

$x^3-3x-(x+k)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$

すなわち，

$$x^3-4x-k=x^3-(2\alpha+\beta)x^2+(\alpha^2+2\alpha\beta)x-\alpha^2\beta$$

が，恒等的に成り立つ。

ゆえに，両辺の対応する項の係数を比較して，

$2\alpha+\beta=0$，$-4=\alpha^2+2\alpha\beta$，$k=\alpha^2\beta$

よって，$\beta=-2\alpha$ を第２式に代入して，

$\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$，$\beta=\mp\frac{4}{\sqrt{3}}$，$k=\pm\frac{16}{3\sqrt{3}}$

したがって，求める接線の方程式は，

$y=x\pm\frac{16}{3\sqrt{3}}$　＜終＞

３次以上の関数のグラフは，微分法を学んだ上で描くことになっているから，（例２）のような解法は，あまり実用的ではないかもしれないが，恒等式や接線の意味を再確認させる意味では，このような解法も役に立つと思われる。

参考にしていただければ幸いである。

通巻第49号
2004年 10月 1日　印刷
2004年 10月 6日　発行
©編修・発行　実教出版株式会社
代表者　本郷　充
定　価　210円（本体200円）
発行所　〒102-8377　東京都千代田区五番町5
TEL. 03-3238-7777
http://www.jikkyo.co.jp/