実 践 記 録

折り紙の数理

佐世保工業高等専門学校助教授　川崎敏和

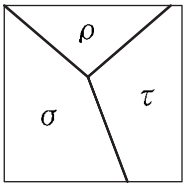
§1．まえおき

今回の折り紙の数理は，紙を平たく折ることから始めて，内接円を持つ四辺形，球面上の２次曲線へと話を進める。

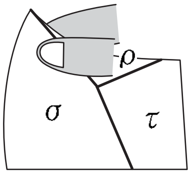
折り紙講習では，生徒の理解度がリアルタイムで見え，講習の最後に生徒自身が折った完成品を手にさせなければならない。そのため，数学の講義以上の準備と熱意が要求される。

§2．いっしょに折る

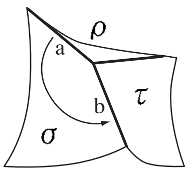
では紙を折って，生徒サイドの気持ちを体験しよう。まず(1)のように，紙（長方形でもよい）の中央付近から自由に３本の直線を引く[*1]。次に(2)のように，線をつまんで山折りする[*2]。３本とも折る。すると(3)のような形になるので，面 σ をへこませながら[*3]，山折り線 a を b に近づける。このとき曲面 τ，ρ がともに平面になるように注意する[*4]。すると(4)のように面 σ の中に谷折り線が自然にできて，(5)のように平たく折り畳むことができる。



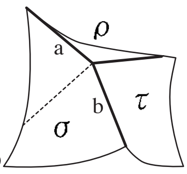
(1)



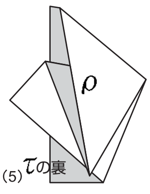
(2)



(3)



(4)



(5)

§3．検　　証

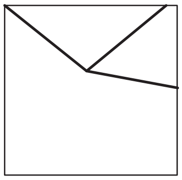
*1　「自由」と言われると生徒はとまどう。３つの線のなす角度を具体的に指定してもらいたくなる。また(6)のように片寄ると，(3)以降ができない。

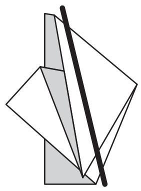
*2　日常生活では，つまんで折ることはまずない。机の上に置いてきちんと折りたくなる。だがそうすると，端から端まで折り，余分な線がつく。

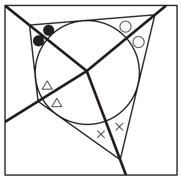
*3　「へこませる」の意味が理解できない。説明する際，へこませる面が生徒から見えるように，注意しなければならない。また，(1)と大きく異なる位置に線を引いた場合は，どの面をへこませるのかわからない（→実は，どの面でもよい）。

*4　どの面も曲がっているので，平面にせよと言われても，どうすればよいかわからない。

我々が数学を教えている時も，生徒たちはこのような疑問・困惑・誤りでパニックを起こしているかもしれない。


(6)


(7)


(8)

§4．折ったものを切る

折り畳んだものは縁が不揃いなので，(7)のように太線でまっすぐ切る。線の位置，傾きは自由。切る代わりに折り目を強くつけても構わない。ひろげると(8)のようになるが，四角形の縁は，ひろげる前は一直線に重なっていたので，折り目が角を二等分していることがわかる。また，中央の点から辺に垂線を下ろすと，三角形の合同により，この点が内心であることがわかる。（§8に続く）

§5．内接円を持つ四角形

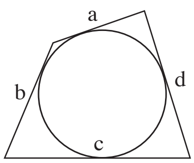
四角形が外接円を持つ　⇔　$A - B + C - D = 0$

はよく知られている（BとDを移項して $=\pi$ と表すのが普通である）。この条件式で，角度を辺の長さ

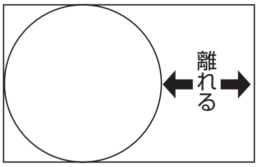
に置き換えると，内接円に関する命題

四角形が内接円を持つ ⇔ $a-b+c-d=0$ (★)

ができる。(⇒)の証明は，中学生向けの問題になる。(★)が成り立たない長方形では，３辺としか接しない(10)。



(9)

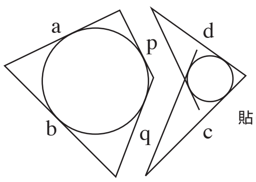


(10)

§６．四角形の貼り合わせ

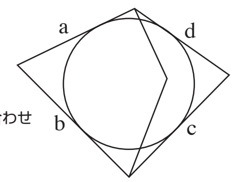
内接円を持つ四角形は，面白い性質を持つ。

貼り合わせ定理　内接円を持つ２つの四辺形が，(11)のように，過不足なく２辺が一致するとき，２つを貼り合わせてできる四辺形もまた内接円を持つ。



(11)

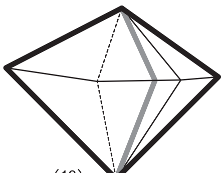
貼り合わせ

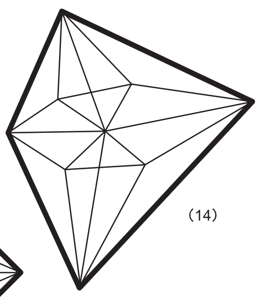


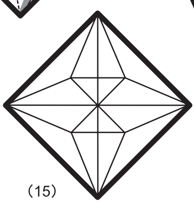
(12)

証明　(11)左が内接円を持つことから，(★)より，$a-b+q-p=0$，$q-p+c-d=0$がでる。２つの式を足すとpとqが消えて，$a-b+c-d=0$が得られる。これは２つを貼り合わせた四角形(12)もまた内接円を持つことを意味する。

§2～§4でわかるように，(11)の各四角形は，角の二等分線を折ることで縁が一直線に重なる。したがって，(12)で左右の四角形を角の二等分線で(13)のように折ると，太線が一直線に重なる。


(13)


(14)


(15)

§７．折り鶴

(14)は，(13)と同じ構造の四角形を上下２つ貼り合わせたもので，折りたたむと，変形した折り鶴ができる（もちろん首と尾を半分に細く折って，翼の間に中割り折りしなくてはならない）。正方形の折り鶴(15)とは，長さや角度が違うだけで，線のつながり具合が同じであることに注意されたい。

貼り合わせ定理より，(14)の上下それぞれの四角形は内接円を持ち，２つを貼り合わせた(14)全体も内接円を持つ。これから次の命題を得る。

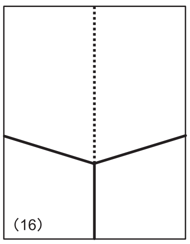
変形鶴基本定理　折り鶴が折れる四角形は内接円を持つ。

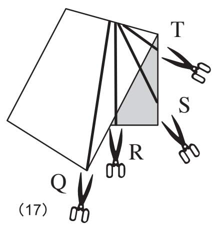
長くなるので証明は書かないが，逆も成り立つ。つまり，(1)～(8)で作った四角形で折り鶴が折れる。(詳細は拙著「バラと折り紙と数学と」（森北出版）を見られたい)

§８．折ったものを切る（再考）

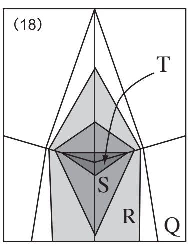
(1)～(8)を授業で実践すると，変わった四角形を作る者があらわれる。例えば，(16)の線で折ったものを(17)のように切ると様々な形ができる。三角形や(19)(20)のようにひらいた四辺形（四角形とはよべない）もあるが，どれも内接円を持っている。(21)は(20)を折ったもので，無限に長い尾を持つ鶴になる。

(22)は長方形ではない。左右両側にひらいた内

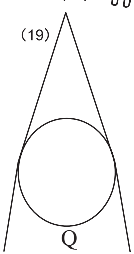

(16)



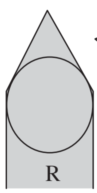
(17)



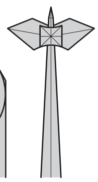
(18)



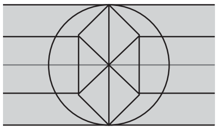
(19)



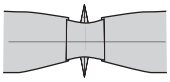
(20)


(21)

接円を持つ四辺形である。折ると，(23)のように無限に長い翼を持つ鶴になる。太っていて亀に見えるので，私は亀鶴と呼んでいる。鶴と亀で二倍目出たい。



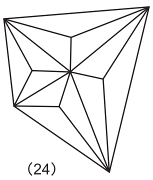
(22)



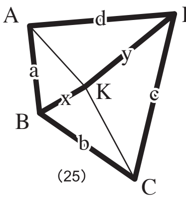
(23)

§９．鶴心と２次曲線

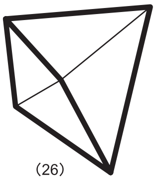
折り鶴の構造と用紙形がわかったので，(1)〜(8)で作った用紙で鶴を折ることにしよう。すると，ほとんどの人は(24)のように折る（中央の点は内心）。ところがこれではうまくいかない。紙が引きつって，平たく畳もうとすると破れそうになる。実は(25)(26)の太線の四辺形がすべて内接円を持つように，中央の点Kをとらなければならない。



(24)



(25)

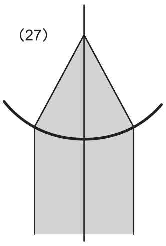


(26)

(25)のように辺の長さを表わすと，(★)より，$a-x+y-d=0$，つまり $x-y=a-d$ となる。$a-d$ は用紙で定まる定数なので，この等式は，点KがBとDを焦点とし，AとCを通る双曲線上にあることを意味する。同様に(26)から，点KはAとCを焦点とし，BとDを通る双曲線上になければならない。こうして２つの双曲線の交点として定まる点Kと用紙の四隅を線で結んでから，それぞれ，角を二等分するように折るときれいな鶴ができる。私は点Kを**鶴心**と呼んでいる。

§10．ひらいた四辺形の鶴心

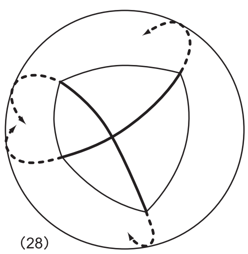
内接円を持つひらいた四辺形の場合は多少話が違う。例えば(27)の鶴心は，放物線と直線（退化した２次曲線）の交点になる。当然，用紙形によって楕円や円も登場する。ただ数学としてまとめる際,「双曲線と楕円の交点になる場合は云々，別の組み合わせの場合は云々」と場合分けした表現にしたくない。そこで舞台を変える。



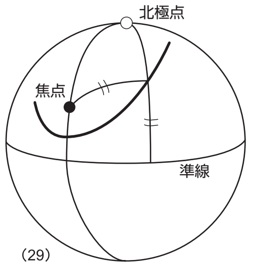
(27)

§11．球面上の２次曲線

球面上で折り鶴を考えることにする。赤道を境に，北半球表面を南半球表面に移動させるのが，**球面上の折り**である。内接円を持つ四辺形や角の二等分折りも自然に導入できる。しかも球面は有界なので，（北極点から離れていった２つの経線が南極点で出会うように）ひらいた四辺形自体が存在できない。凹四辺形はあっても，ひらいた四辺形は存在しない。球面上の変形折り鶴なら，鶴心がすっきりまとまるに違いない。



(28)



(29)

こう考えて，球面上の２次曲線を調べてみた。焦点からの距離の和や差で楕円と双曲線を，焦点と準線で放物線を定義してみると，いろいろと面白いことがわかった。

(28)の太線は，鶴心を定める双曲線である。平面上の双曲線は端が無限の彼方にひろがっているが，球面上では(28)のように端が裏側でくっつくと考えるのが自然である。当然，

球面上では，双曲線＝楕円

と考えたくなる。これは実際正しく，大円弧の長さの簡単な計算で高校生でも証明できる。当然，放物線＝楕円となる。平面上では，放物線は他の２つと少し様子が違っていた。球面放物線には何か特徴はないだろうか？嬉しいことに「放物線＝ホニャララの楕円」と特徴づけられる(29)。これもまた，高校数学で簡単に導ける。球面２次曲線の性質は調べつくされているだろうが，自力で再発見を楽しむには丁度よい。