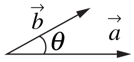
ワンポイント教材

ベクトルの有用性

―ベクトルの内積の一考察―

平面上の２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積は，



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

ここで，$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ とすると，三角形における余弦定理から，

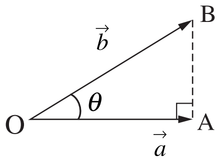
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

が導かれることは，ベクトルの内積の基本事項である。

そして，ほとんどの教科書では，内積の成分による計算を中心にいろいろな図形の性質を調べている。

しかし，内積の図形的定義には，いろいろな応用がある。

ここでは，特に，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\angle\mathrm{OAB} = 90^\circ$ の時，

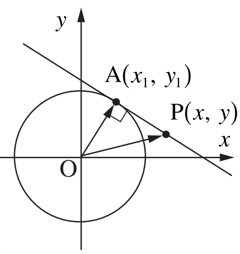


$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|^2$$

となることの応用を考えてみよう。

（例１）円 $x^2 + y^2 = r^2$ の周上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式を求めてみよう。

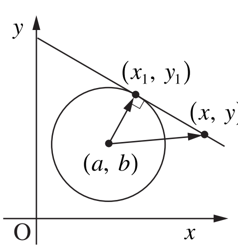
＜解＞与えられた円の中心をO，接点をA，接線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\angle\mathrm{OAP} = 90^\circ$ であるから，



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$ よって，

$x_1x + y_1y = r^2$ これが，求める接線の方程式である。＜終＞

なお，（例１）と同様にして，円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の周上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式も，簡単に求めることが出来る。



（例２）直線 l：$ax + by + c = 0$ と原点Oとの距離を求めてみよう。（ただし，$-c > 0$）

＜解＞ベクトル $\vec{n} = (a,\ b)$ に垂直な直線をgとし，原点Oとgとの距離を d とする。

g上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = |\vec{n}|d$

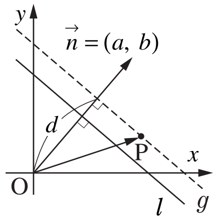
よって，$ax + by = |\vec{n}|d$

この直線gは，直線 l：$ax + by + c = 0$ に平行であり，gが l に一致するのは，

$|\vec{n}|d = -c$ のときである。

このとき，$d = -c/|\vec{n}|$

$$= \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ ＜終＞



このように，内積の図形的定義に戻ってその意味や応用を考えることは，非常に有用である。

ついでながら，内積の分配法則

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b}$$

についても，以下のように，成分を用いずに，定義から直接的に証明できる。生徒の実態に応じて活用していただければ幸いである。

＜証明＞三角関数の余弦定理より，

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

よって，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\left\{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2\right\}$$

ゆえに，

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{2}\left\{|\vec{a}|^2 + |\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}-(\vec{a}+\vec{b})|^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{|\vec{a}|^2 + |\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{b}|^2\right\}$$

ここで，①より

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$

であることから，

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{2}\left\{2|\vec{a}|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}\right\}$$

$$= |\vec{a}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b}$$

＜終＞

通巻第48号
2004年 2月15日 印刷
2004年 2月20日 発行
©編修・発行 実教出版株式会社
代表者 本郷 充
定 価 210円（本体200円）
発行所 〒102-8377 東京都千代田区五番町5
TEL. 03-3238-7777
http://www.jikkyo.co.jp/