実践記録

カライドサイクル（Kaleidocycle）について

奈良女子大学文学部附属中等教育学校教諭　大西俊弘

1．はじめに（カライドサイクルとは）

私は，数年前に古本市で「遊びの博物誌」[(1)] という本に出会った。この本には，面白いもの・不思議なものが数多くの紹介されており，数学的なパズル好き・工作好きの者にとっては，至福の書と言える。この本は，現在でも文庫本として入手可能であるので，一読をお薦めしたい。

この本の１節に,「回転するジャバラ」というものが紹介されている。「回転するジャバラ」とは，図１のようなもので，紙を折って円筒形の蛇腹状にしたものである。この物体を中心部から開いていくと，まるで花が咲くように，変形させることができる。

「回転するジャバラ」は，正式名称をIsoAxis（アイソアクシス）といい，1958年にアメリカのグラフィックデザイナーWallace Walkerによって考案されたものである。

IsoAxisの作り方は，以下のとおりである。

①縦：横＝１：２の長方形の厚紙を用意する。

②図２のように，縦線・斜め線を引く。

③縦線は谷折りに，斜め線は山折りにする。

④折り畳んでいき，蛇腹状にする。

⑤蛇腹の端と端を貼り合わせる。

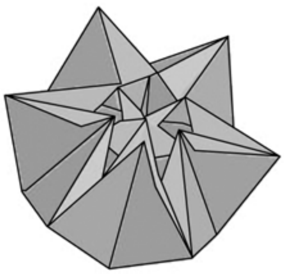

図１　回転するジャバラ（IsoAxis）

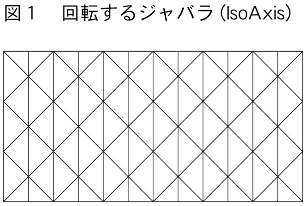

図２　IsoAxisの展開図

IsoAxisは，色を塗って作る[(2)] と非常に美しいものとなるが，上下の面の端が途切れており，多面体のように各面が連結している訳ではない。そこで，Wallace WalkerはIsoAxisを発展させて（展開図を縦方向に拡大することによって），図３のように各面が連結した立体を考案した。これをkaleidocycle（カライドサイクル）と呼び，中心に向かって無限に回転させることができる不思議な立体である。Web上でアニメーション[(3)(4)(5)] が公開されているので，単なる紙細工とは思えないその面白さを是非一度ご覧いただきたい。

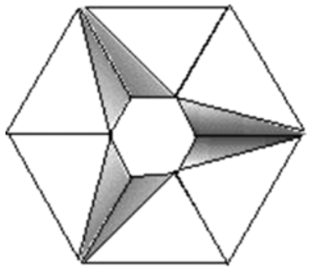

図３　カライドサイクル

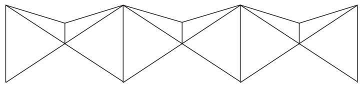

図４　偶数個の四面体の稜を連結

Wallace Walkerは，カライドサイクルの本[(6)] を出しているが，近年日本語版[(7)] も出版された。この本には，Escherの絵柄を描いた展開図（型紙）が多数付いており，買ってすぐにカライドサイクルを組み立てることができる。ちなみに，本の価格も安いので，お薦めの１冊である。

図３のカライドサイクルをよく見ると，四面体を連結したものであることがわかる。したがって，四面体をもとにしてカライドサイクルを次のようにして作ることができる。

①偶数個（6個以上）の四面体を用意する。

②図４のように，四面体の稜を連結する。

③両端を繋いで，図３のように環状にする。

なお，カライドサイクルは，アイソアクシスと同様に，１枚の厚紙を折って作ることも可能である。

本稿では，カライドサイクルの展開図を元にして，カライドサイクルの数理を明らかにし，穴の空かないカライドサイクルとなる条件について考

察する。次に，グラフ作成ソフトGRAPESを用いて展開図を描画する方法についてまとめる。最後に，カライドサイクルの発展形についてまとめ，総合学習での有用性についても触れる。

２．カライドサイクルの数理

私は，1998年に植野美穂先生の発表(8) を聞いてカライドサイクルの存在を知り，その面白さに魅了された。植野先生の発表の要旨は以下のとおりである。

①図５の展開図において，縦線を谷折りに，斜め線を山折りにして蛇腹のようなものを作っていき，着色部分を糊代にしてリング状にすると，図６のような立体ができる（これは，回転する部分が３つあるので，$n=3$のカライドサイクルと表記することにする）。

②図５の展開図を，図７のように横方向に延長すると，$n=4$や$n=5$のカライドサイクルを作ることができるが，単に延長しただけでは，図８に示すように中心部分に空洞ができてしまう。空洞ができないカライドサイクルを作るには，どうすればよいか考察した。

植野先生の発表では，数学的な考察のヒントは与えられたが，細部までは触れられなかった。そこで，私なりに細部を考察してみた結果を以下に述べる。

図７は，$n=5$の場合のカライドサイクルの展開図である。合同な二等辺三角形が，たくさん集まってできていることがわかる。２つの二等辺三角形を合わせた菱形に着目し，その対角線の長さを$2a$，$2b$とすると菱形の頂点から中心までの長さは，

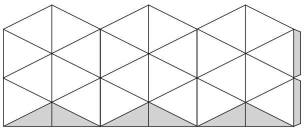
図５　カライドサイクルの展開図（$n=3$）

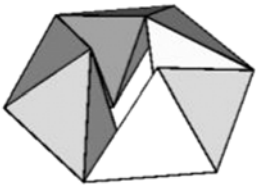
図６　カライドサイクル（$n=3$）

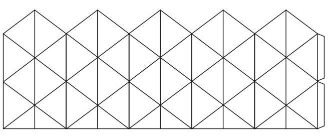
図７　カライドサイクルの展開図（$n=5$の場合）

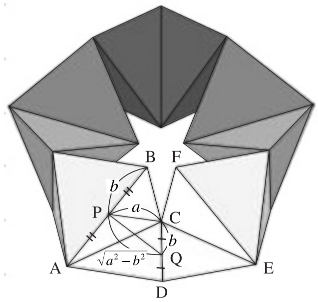

図８　斜め上から見た図（$n=5$の場合）

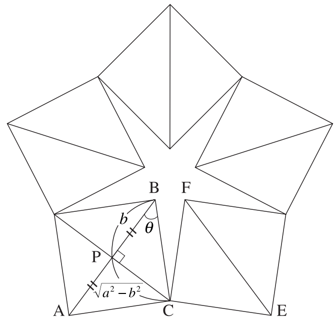

図９　真上から見た図（$n=5$の場合）

それぞれa，bとなる。

図７の展開図で作ったカライドサイクルが図８で，点P，点Qは，それぞれ辺AB，辺CDの中点である。

図7に示した長さa，bは，図8では$PB=CQ=b$，$PC=a$となる。２点P，Qを結ぶと（線分PQは四面体ABCDの内部を貫通する），$\angle CQP=90°$であるから，$\triangle CQP$は直角三角形となり，３平方の定理から

$$PQ=\sqrt{a^2-b^2}$$

真上から見た図９におけるCPの長さは，図８におけるPQの長さに等しいので

$CP=\sqrt{a^2-b^2}$　　　$\angle PBC=\theta$とおくと

$$\tan\theta=\frac{CP}{BP}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

三角比の公式から

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\frac{a^2-b^2}{b^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

$a>0,\ b>0,\ \cos\theta>0$であるから$\cos\theta=\dfrac{b}{a}$

この式の右辺は，図７の展開図における斜め向きの直線の傾きを表しているので，その傾きをkとすると$k=\cos\theta$

一方，閉じたカライドサイクルでは，図９から

$$\theta = \frac{360°}{2\times n} = \frac{180°}{n} \text{ であるから}$$

よって，

$k = \cos\dfrac{180°}{n}$ を直線の傾きとすれば，閉じたカライドサイクルが得られる。

３．GRAPESを利用して展開図を描く

植野先生の発表を聞いた後，自分でもカライドサイクルを作ってみることにした。私は不器用であるため，コンピュータを使って正確な展開図を描くことにした。しかし，通常のお絵かきソフトでは，直線の傾きを指定して描くことは簡単ではない。また，仮に描けたとしても，n の値が変化すれば，１から描き直す必要が出てくる。

そこで，任意の n（但し $n \geqq 3$）に対して，図７のような展開図を，直線のグラフを利用して描くことを思いついた。具体的には，直線 $y = \pm\cos\dfrac{180°}{n}\cdot x$ のグラフを簡単に描くために，グラフ作成ソフトGRAPES[(9)] を利用した。

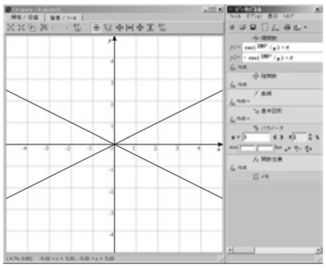

図10　GRAPESで直線 $y = \pm\cos\dfrac{180°}{n}\cdot x$ を描く

図10において，パラメータ n を変化させることによって直線の傾きを変えることができる。他の直線の方程式も同様に入力していくと，展開図に必要な直線群を描くことができる。

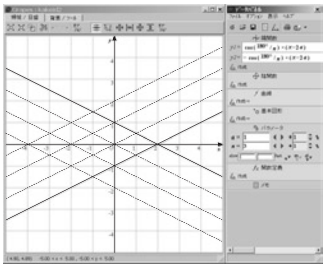

図11　直線 $y = \pm\cos\dfrac{180°}{n}\cdot(x-2a)$ の残像利用

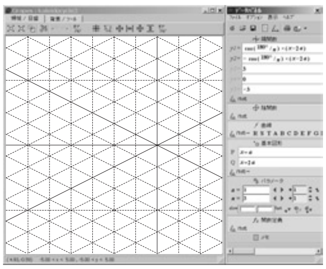

図12　縦線を入れて座標軸等を非表示にする

しかし，この方法では，n が大きくなると膨大な数の直線の方程式を入力する必要がある。そこで，もう１つのパラメータ a を導入して，直線 $y = \pm\cos\dfrac{180°}{n}\cdot(x-2a)$ を考え，a の値を１ずつ変化させながら連続的にグラフを描いていき，その残像が残るようにした（図11）。

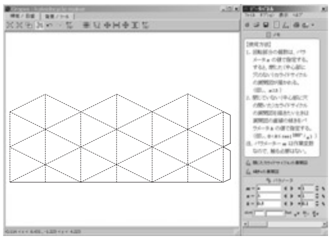

図13　展開図自動作成（スクリプト利用）

次に，斜め方向の直線だけでなく，縦方向の直線群も自動的に描けるように，２直線 $x = a$，$x = 2a$ を付け加え，座標軸・目盛・格子等を全て非表示にして，直線群だけを表示させた（図12）。この画面をクリップボードにコピーし，ワープロソフトに貼り付けて印刷すれば，カライドサイクルの展開図が出来上がる。GRAPESには，「印刷用のコピー」の機能があるので，非常に精度の高い展開図が得られる。

図12に示した方法で実用上の不自由はほとんどないが，展開図作成ツールとしては，次のような問題点がある。

①不要な部分まで，直線が表示される。

②n が大きくなると画面上に入りきらない。

③閉じた場合の展開図しか描けない。

GRAPESのスクリプト機能を利用すれば，上記の問題点も解消することができる。すなわち，次のような機能を持ったスクリプトを開発した（スクリプトは提供可）。

①n を指定すれば，展開図の必要な部分のみ自動描画する。

②のりしろも自動的に描き，画面内に収まる。

③直線の傾きを可変にし，穴の空いた場合の展開図も描画可能。

しかし，これはあくまで発展であり，高校生にここまで求めることはできないであろう。

４．授業実践

（１）実施時期　２００２年9月

（２）対象　本校５年生（高２）　５名

（希望者，数学が不得手な者が中心）

（3）授業の概要

①１時間目

カライドサイクルの作り方を説明し，製作させる。適宜色を塗るように指示をして，楽しませる。最後に,「回転する部分を４つにし，中央に穴が空かないようにするにはどうすればよいか考えてくるように」との課題を出す。

②２時間目

正解に自力で到達した者はいなかったので，図５の展開図を配布して組み立てさせ，菱形の対角線の長さが，実際のカライドサイクルではどの部分に当たるのか確認させた。その後，生徒を指名しながら展開図の直線の傾きについて数学的に考察した。

③３時間目

GRAPESを利用して展開図の作成を行った。生徒はGRAPESを使用したことがあるので，操作にも慣れており，残像を利用した直線群という概念も素直に受け入れることができた。$n=4$，$n=5$ 等の場合について，展開図を印刷し，実際に閉じたカライドサイクルとなるかどうか検証した。

５．問題の発展のさせ方の見本として

BrownとWalterは，数学における問題作りの方法として「What-If-Not方略」[10] を提唱している。それは，ある問題の１つの属性を変更することによって，新しい問題を作るというものである。この手法を応用して，異なった種類のカライドサイクルを作ることができる。

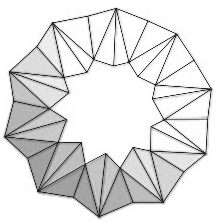

図14　回転する部分を増やす($n=10$)

図５のカライドサイクルの展開図を分析すると，次

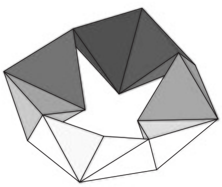

図15　2種類の二等辺三角形で構成（$n=4$）

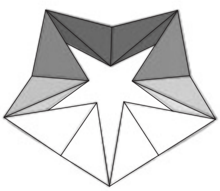

図16　直角三角形で構成($n=5$)

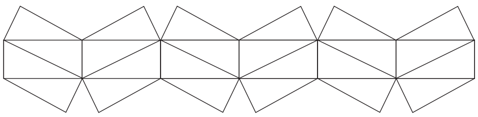

図17　invertible cubeの展開図

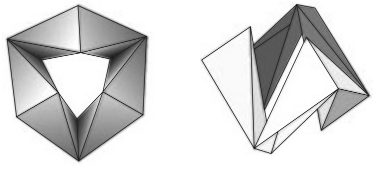

図18　invertible cube（$n=3$，直角三角形）

のような属性が挙げられる。

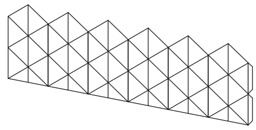

図19　ねじれたカライドサイクルの展開図

①回転する部分が３個ある。

②四面体の４つの面は同じ形をしている。

③四面体の各面は二等辺三角形である。

例えば，①の属性を変更して，$n=10$ とすると，図14のような立体になる。

②の属性を変更して，各四面体を大きさの異なる２種類の二等辺三角形で構成すると，図15のような立体になる。

③の属性を変更して，各四面体を直角三角形で構成すると，図16のような立体になる。

なお，直角三角形で構成した $n=3$ の場合は，1928年にPaulSchatzによって考案された「invertible cube」[11] と呼ばれる立体になる。図17にその展開図を示すが，２種類の直角三角形（$1:2:\sqrt{3}$ と $1:2:\sqrt{5}$）で構成されている。図18に示したように，回転の途中で立方体（の一部）となるなど，とても面白い動きを示し，針金で作ったものは，科学玩具として販売されている。これについては,「幾何学おもちゃの世界」[12] というサイトで詳しく解説されている（このサイトには他にも面白いものが多数ある）。

また，別の拡張の仕方として，図19のように展開図[13] を傾けて描くと，ねじれたカライドサイクルが得られる。

以上のように，カライドサイクルは，数学における問題の発展のさせ方を学習するのに適した素材である。

６．総合学習の素材として

カライドサイクルは，以下に示すように，児童・生徒の年齢に応じた楽しみ方が可能である。表面に絵を描けば，美術・工芸と数学とをつなぐ素材ともなるので，総合学習の素材として有望である。

（1）小学校低学年での活用

プラスチック製のパーツを組み合わせて多面体等を製作する「Polymorf」(14) という外国製玩具がある。これを用いれば，ハサミ等がまだ十分に使えない小学校低学年の生徒でもカライドサイクルを組み立てることができるので，遊びから，不思議さを体験することが可能である（図20）。

図20　多面体用の玩具で作る

（2）小学校高学年での活用

ある程度正確な工作がこなせる年齢になれば，図画・工作と算数との融合として，絵柄を印刷した展開図に塗り絵をさせたり，無地の展開図にカラフルな絵柄を児童に描かせたりすることができる。

＜作り方の解説＞

展開図は自分で描いても良いが，白紙のものは「Paper Model of Polyhedra」(15) というサイトから，エッシャーの絵柄が入ったものはJill Britton (16) のサイトからダウンロード可能である。また，作り方の解説は，数多くのサイトに掲載されているが，Simon Quellen Field (17) のものが，動画入りで美しくて分かりやすいので，それを利用するとよい。私は，小学生向きに展開図と作り方の解説をまとめたものを作ったので，そのPDFファイルの提供は可能である。ご希望の方は，ご連絡願いたい。

図21　表面に絵や模様を描いた例

使用する紙は，画用紙よりもケント紙（出来るだけ厚手のもの）がよく，卒業証書に使うような紙が最良である。ノリは，木工用ボンド（速乾タイプ）が適している。

（3）中学生での活用

中学生になれば，直線の傾きの概念を学習するので，展開図の傾きを変化させることによって試行錯誤的に，穴の空かないカライドサイクルを作ることも可能となる。また，前章で示したように，さまざまな数学的な発展のさせ方を体験させることもできる。また，デザイン教育の素材としても面白いので，美術と数学を融合させた総合学習にも応用できるであろう（図21）。

（4）高校生～大学生での活用

高校になれば，２節で示したような数学的考察が可能となる。興味を持つ生徒には，Marcus Engel (18) や Hubert Martineau (19) のサイトで，より理論的な考察が発表されているので，紹介するとよいであろう。

また，数学的な素養のある学生には，情報教育とも融合さて，３次元グラフィックスに挑戦させると面白いであろう。良い見本として，前述のサイト (3) (4) (5) で素晴らしいコンピュータグラフィックスを見ることができる。

以上のように，カライドサイクルは，その動き自体が面白いだけでなく，各成長段階に応じて楽しみながら学習することができる。

７．おわりに

私は1998年の夏にカライドサイクルと出会って以来，その魅力に取り憑かれてしまった。日本では，数学教育の素材としてまだあまり知られていないが，総合的な学習の時間等に取り組む素材としても非常に優れている。本稿を読まれた方は，ぜひご自分で作ってみられることをお勧めしたい。なお，授業実践については，植野・田中先生

の詳しい報告[20]があるので，参照されたい。

GRAPESのスクリプト「kaleidocycle-maker」や，絵柄入りの展開図（作り方の説明入り）のPDFファイルを入手されたい方は，下記までご連絡願いたい。

（自称）カライドサイクル委員会代表　大西俊弘
E-mail　：　t-onishi@cc.nara-wu.ac.jp

【参考文献・Web】

(1)　坂根厳夫　「遊びの博物誌」回転するジャバラ　朝日新聞社（1977）
(2)　西三数学サークル通信30号（丸山）「回転するジャバラ」
http://www.seisan-math.net/tuusin/tuusin3/tuusin30/tuusin30.htm
(3)　Hans-Peter Schroecker　「Kaleidocycles」
http://www.uni-ak.ac.at/geom/opengeom/anim/kaleidocycle.html
(4)　Maurice Starck　「the kaleidohedron from the IsoAxis grid 」
http://www.ac-noumea.nc/maths/amc/polyhedr/IsoAxis_.htm
kaleido1_.htm　kaleido2_.htm　flowers_.htm
(5)　Marcus Engel　「AniKa -- Animated Kaleidocycles」
http://www2.am.uni-erlangen.de/~engel/kal/anim.html
(6)　Doris Shattschneider and Wallace Walker
「M.C. Escher Kaleidocycles」Tarquin Publications
(7)　ドリス・シャットシュナイダー, ウォレス・ウォーカー
「M.C.エッシャー カライドサイクル」タッシェンジャパン
(8)　植野美穂　「回転する立体をつくる」　Ｔ３ＪＡＰＡＮ 第2回年会発表
(9)　友田勝久　「関数グラフソフトGRAPES 6.23」
http://okumedia.cc.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/
(10)　Brown, S. I. & Walter, M. I. 「いかにして問題をつくるか—問題設定の技術—」 東洋館出版
(11)　Paul Schatz-Foundation　「The invertible cube」
http://www.paul-schatz.ch/entd_wuerfel_e.html
(12)　西原明　「幾何学おもちゃの世界　4面体の輪」
http://www1.ttcn.ne.jp/~a-nishi/kaleidocycle/kaleido.html
(13)Recreomath　Charles-E. Jean「Kaleidocycle torsade」
http://www.recreomath.qc.ca/dict_torsade_kaleidocycle.htm
(14)　Polymorf
http://www.polymorf.net/10kaleidocon1.htm
http://www.polymorf.net/12pckaleidocon1.htm
(15)　G.Korthals Altes　「Paper Model of　Polyhedra」
http://www.korthalsaltes.com/calei6.html
index9a.html　index9b.html
(16)　Jill Britton「Polyhedra Pastimes ACTIVITY LINKS」
http://ccins.camosun.bc.ca/~jbritton/kaleidocycle.pdf
(17)　Simon Quellen Field
「A moving sculpture made from paper」
http://sci-toys.com/scitoys/scitoys/mathematics/paper_ring.html
(18)　Marcus Engel　「MC.Escher Kaleidocycles」
http://www2.am.uni-erlangen.de/~engel/kal/index.html
(19)　Hubert Martineau　「Kaleidocycle ou anneau de n tetraedres (n entier pair)」
http://perso.wanadoo.fr/math.lemur/3d/kalei.htm
(20)　植野美穂・田中賢治　「総合数学Ａの教材とその指導について」
東京学芸大学教育学部附属高等学校大泉校舎研究紀要第23集 pp.13-24

＜その他の資料一覧＞

(21)　SPDsoft　Por ultimo　「una animacion en formato QuickTime de un Iosaxis」
http://persephone.cps.unizar.es/General/gente/spd/Isoaxis.MoV
(22)　www.mathnstuff.com　「Kaleidocycles by the Net Method」
http://www.mathnstuff.com/papers/tetra/kalei.htm
EnchantedLearning.com
(23)　「Make A 3-D Hexaflexagon」
http://www.enchantedlearning.com/math/geometry/hexaflexagon/instructions.shtml
(24)　Woody Duncan　「Kaleidocycles "art that moves"」
http://kancrn.kckps.k12.ks.us/rosedale/duncan/Kaleidocycles.html
(25)　Jurgen Koller　「Rings of Tetrahedra Kaleidocycles」
http://www.mathematische-basteleien.de/kaleidocycles.htm
(26)　Yves Seger　「GEOSPACE」
http://perso.wanadoo.fr/yves.seger/
(27)　Lisa Marie Bush　「A Group Theoretic Approach to Kaleidocycles and Cubeocycles」
http://www.users.muohio.edu/porterbm/sumj/2003/kaleidocycles.pdf
(28)　Franz Zahaurek　「Der umstulpbare Wurfel」
http://www.fzk.at/
http://www.fzk.at/files/bastelbogen.pdf
(29)　関口福徳　「反転するキューブ」
http://www.amy.hi-ho.ne.jp/fukusuke/Steiner/cube.html