ワンポイント教材

恒等式についての一考察

－展開公式の利用－

東京都立武蔵村山高等学校長　淺井康明

xについての恒等式において，未定係数を定める方法は，多くの教科書では以下のようになっている。

①係数比較法：同じ次数の項の係数の比較

②数値代入法：xにいくつかの値を代入

しかし，恒等式のうち，$x=a$のまわりの展開に関するものの扱いは，これ以外に，次のような恒等式そのものを利用する方法がある。

すなわち，$x=(x-a)+a$

より，この両辺を２乗，３乗して，

$$x^2=(x-a)^2+2a(x-a)+a^2$$

$$x^3=(x-a)^3+3a(x-a)^2+3a^2(x-a)+a^3$$

が恒等的に成り立つ。

これらを利用して，恒等式における未定係数を定めてみよう。

（例１）xについての恒等式

$$x^2+2x+3=a(x-2)^2+b(x-2)+c$$

において，定数a，b，cの値を求めよ。

＜解＞ $x=(x-2)+2$

$$x^2=(x-2)^2+4(x-2)+4$$

よって

$$x^2+2x+3=\left\{(x-2)^2+4(x-2)+4\right\}+2\left\{(x-2)+2\right\}+3$$

ゆえに

$$x^2+2x+3=(x-2)^2+6(x-2)+11$$

したがって，

$a=1$，$b=6$，$c=11$　＜終＞

この解法では，次の性質を用いている。

$$a_0(x-a)^n+a_1(x-a)^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}(x-a)+a_n$$
$$=b_0(x-a)^n+b_1(x-a)^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}(x-a)+b_n$$

が，xについての恒等式であるとき，

$$a_0=b_0,\quad a_1=b_1,\quad \ldots\ldots,\quad a_n=b_n$$

すなわち，xについてのn次の整式$f(x)$は，

$$f(x)=a_0(x-a)^n+a_1(x-a)^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}(x-a)+a_n$$

と一意に表される。

（例２）xについての恒等式

$$x^3-3x^2=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$$

において，定数a，b，cの値を求めよ。

＜解＞$x=(x-1)+1$

であるから，

$$x^2=(x-1)^2+2(x-1)+1$$

$$x^3=(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1$$

よって

$$x^3-3x^2=\left\{(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1\right\}$$
$$-3\left\{(x-1)^2+2(x-1)+1\right\}$$

ゆえに

$$x^3-3x^2=(x-1)^3-3(x-1)-2$$

したがって，

$a=0$，$b=-3$，$c=-2$　＜終＞

なお，恒等式

$$x^3=(x-a)^3+3a(x-a)^2+3a^2(x-a)+a^3$$

を変形すると，

$$x^3-a^3=(x-a)^3+3a(x-a)^2+3a^2(x-a)$$
$$=(x-a)\left\{(x-a)^2+3a(x-a)+3a^2\right\}$$
$$=(x-a)\left(x^2+ax+a^2\right)$$

となり，３次の因数分解の公式が，ごく自然に得られる。

参考にしていただければ幸いである。

通巻第47号
2003年10月1日　印刷
2003年10月6日　発行

©編修・発行　実教出版株式会社
代表者　本郷　充

定価　210円（本体200円）
発行所　〒102-8377　東京都千代田区五番町5
TEL．03-3238-7777
http://www.jikkyo.co.jp/