ワンポイント教材

級数の和と数列の極限

〜 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ の利用〜

東京都立福生高等学校教頭　淺井康明

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和は，第 n 部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ の極限値で与えられる。

すなわち，$n \to \infty$ のとき，$S_n \to \alpha$ ならば

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$$

である。

ここで，$n \to \infty$ のとき，$S_n \to \alpha$ ならば

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \alpha - \alpha = 0$

よって，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和が存在するための必要条件である。

この条件については，多くの教科書で扱っているが，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和が存在するかどうか，すなわち，第 n 部分和 S_n の数列 $\{S_n\}$ が収束するかどうかの判定にのみ用いている。

実は，この条件 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を用いれば，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を簡単に求めることができるのである。

次の例を考えてみよう。

（例１）次の無限級数の和を求めよ。

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots\cdots$$

＜解＞第 n 部分和を S_n とすると，

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{n+1} = 1$$

よって，$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = 1$

ゆえに，$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$ よりこの無限級数の和は１である。

＜別解＞この級数の第 n 項を a_n とすると，

明らかに，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

それで，第 n 部分和を S_n とすると

$$S_{2n+1} = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

また $S_{2n} = S_{2n+1} - a_{2n+1}$

よって，$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n+1} - a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = 1$

ゆえに，$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$ より無限級数の和は１である。

（例１）の＜別解＞は，数列 $\{S_n\}$ が収束するための必要条件 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を利用して解いたものである。

（例２）次の無限級数の和を求めよ。

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^3} + \cdots\cdots$$

＜解＞この無限級数の第 n 項を a_n，第 n 部分和を S_n とすると，明らかに，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

それで，$S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right)$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{3}}$$

よって，$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

また，$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \frac{3}{2}$

ゆえに，求める無限級数の和は $\frac{3}{2}$ である。

以上のことを一般化すれば，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について，次のことが成り立つ。

① $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ のとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

② $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ のとき，$\lim_{n\to\infty} S_{kn} = \alpha$ ならば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_{kn} = \lim_{n\to\infty} S_{kn+1} = \lim_{n\to\infty} S_{kn+2} = \cdots\cdots = S_{kn+(k-1)}$$

$$= \alpha$$

（例３）無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{3}$ の和を求めよ。

＜解＞この数列の第 n 項を a_n，第 n 部分和を S_n とすると，$-1 \leqq \sin\frac{n\pi}{3} \leqq 1$ より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{3} = 0$$

それで，

$$S_{6n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{6n-5}\right\} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{6n-4}\right\}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{6n-2}\right\} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{6n-1}\right\}$$

より，

$$\lim_{n\to\infty} S_{6n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって，求める無限級数の和は $\frac{\sqrt{3}}{3}$ である。

このように，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を考える際は，まず $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を調べ，それをもとに第 n 部分和の極限を求めるよう指導してはどうだろうか。無限級数の和について，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を調べることの必要性がより理解されよう。

通巻第46号
2003年 2月15日　印刷
2003年 2月20日　発行
©編修･発行　実教出版株式会社
代表者　本郷　充
定　価　210円（本体200円）
発行所　〒102-8377　東京都千代田区五番町5
TEL. 03-3238-7777
http://www.jikkyo.co.jp/